Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

2º Teste de Análise Matemática III - Turma E

16 de Dezembro de 2005

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Use o Teorema de Stokes para calcular o integral de

$$\omega = dx \wedge dz$$

ao longo da variedade-2

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + z^2 = 1 + y^2 \colon 0 \leq y \leq 1\}$$

com a orientação que no ponto $(0, 0, 1)$ é determinada pelo covector $dy \wedge dx$.

2. Considere a superfície $M \subset \mathbb{R}^3$ definida pela equação $1 + x^2 + y^2 = |z|$. Para cada $\epsilon > 0$ seja

$$C_\epsilon = \{(x, y, z) \in M \colon z = 1 + \epsilon\}$$

e D_ϵ a porção de M limitada por C_ϵ.

(a) Sendo d_ϵ a distância entre $(0, 0, 1)$ e C_ϵ medida sobre M, calcule a razão entre a àrea de D_ϵ e d_ϵ^2. Este número é maior ou menor que π? O que acontece quando $\epsilon \to 0$?

(b) Seja

$$\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = (x, y, A(x, y, z))$$

um campo de classe C^1 com $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. Calcule o fluxo de $\mathbf{F}$ através de

$$M \cap \{(x, y, z) \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$$

no sentido da normal $\mathbf{n}$ que tem terceira componente negativa em $(0, 0, 1)$ e positiva em $(0, 0, -1)$.

3. Determine os valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para os quais a função

$$f(x, y) = \frac{e^{-|x|-|y|}}{|x|^\alpha |y|^\beta}$$

é integrável em $\mathbb{R}^2$.

Resolva uma das seguintes questões:

4. Seja $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 0 \text{ ou } (x^2 + y^2 = 1 \text{ e } z = 0)\}$. Dê um exemplo de uma forma-1 $\omega \in \Omega^1(U)$ tal que $d\omega = 0$, $\oint_C \omega = 0$ para

$$C = \{(x, y, 1) \colon x^2 + y^2 = 1\}$$

mas ω não é exacta.

5. Sejam $h_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1 com $1 \leq i, j \leq n$. Mostre que a função matricial $[h_{ij}]$ é a matriz Hessiana de uma função $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^3 sse

$$\begin{aligned} h_{ij} &= h_{ji} \\ \partial_i h_{jk} &= \partial_j h_{ik} \text{ para todos os } i, j, k. \end{aligned}$$