

1º Teste de Análise Matemática III - Turma E

9 de Janeiro de 2005

**Duração: 1 hora e 30 minutos.**

**Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.**

1. Considere um conjunto de dados experimentais

$$\{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 : i = 1, \dots, n\}$$

onde  $x_i \neq x_j$  para  $i \neq j$ . Determine em função de  $x_i, y_i$  uma expressão para os números reais  $a, b \in \mathbb{R}$  que minimizam

$$\sum_{i=1}^n |y_i - (ax_i + b)|^2.$$

2. Assumindo que a densidade de massa é constante igual a 1, use o Teorema de Fubini para escrever uma expressão em termos de integrais iterados para o momento de inércia em torno do eixo dos  $xx$  do sólido

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq 2x + y \leq 2, 0 \leq 2y + z \leq 2, 0 \leq y \leq x + z\}.$$

3. Seja  $S$  a região do primeiro quadrante limitada pelas curvas  $xy = 1$ ,  $xy = 2$ ,  $y = x$  e  $y = 4x$  e  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável. Mostre que

$$\iint_S f(xy) dx dy = \log 2 \int_1^2 f(u) du.$$

4. Exprima o integral iterado

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz dy dx$$

usando coordenadas esféricas.

5. Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função de classe  $C^1$  tal que  $Jf(\mathbf{x}) = 0$ . Mostre que  $f$  não é injectiva. *Sugestão:* Comece por mostrar que existe um aberto onde a característica de  $Df(\mathbf{x})$  é constante.