

1º Teste de Análise Matemática III - Turma E

Teste para praticar

Duração: 1 hora e 30 minutos.

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Considere o elipsóide

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

onde $a, b, c > 0$. Seja $(x_0, y_0, z_0) \in E$ com $x_0, y_0, z_0 > 0$.

- Mostre que E é uma variedade e determine a sua dimensão.
- Ache a equação do plano tangente a E no ponto (x_0, y_0, z_0) .
- Determine o volume da região limitada pelo plano tangente a E no ponto (x_0, y_0, z_0) .
- Para que ponto (x_0, y_0, z_0) é o volume desta região mínimo? Justifique.

2. Calcule o integral

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2} dz dy dx.$$

3. Mostre que a equação

$$\int_0^x e^{-yt^2} dt = 1$$

define implicitamente y como função de x numa vizinhança de $(1, 0)$ e calcule a derivada desta função em $x = 1$.

4. Seja $\{q_n\}$ uma enumeração dos racionais do intervalo $]0, 1[$ e para cada n , sejam $a_n, b_n \in [0, 1]$ tais que $a_n < q_n < b_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n - a_n < 1$. Seja

$$A = \cup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n[.$$

- Mostre que a fronteira de A é $[0, 1] \setminus A$.
- Mostre que A e $[0, 1] \setminus A$ não são mensuráveis à Jordan.