Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

1º Teste de Análise Matemática III - Turma E

3 de Novembro de 2005

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Determine os extremos da restrição da função $f(x,y) = x^2 + 2y$ ao conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

2. Considere a função

$$\varphi(x,y) = \int_0^{x^2} \operatorname{sen}(xyt^2)dt.$$

Mostre que a equação $\phi(x,y) = 0$ define implicitamente x como função de y numa vizinhança de $(1,0)$ e calcule a derivada da função implícita em $y = 0$.

3. Assumindo que a densidade de massa é constante igual a 1, use o Teorema de Fubini para escrever uma expressão em termos de integrais iterados para o momento de inércia em torno do eixo dos xx do sólido

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \leq x+z \leq 1, 0 \leq y+z \leq 1, 0 \leq z \leq x+y\}.$$

4. Seja

$$V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \colon x^2 + y^2 < 1 \text{ e } z^2 + w^2 < 1\}.$$

(a) Calcule

$$\int_V \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)(z^2+w^2)}}\, dV_4 \ .$$

(b) Considere o conjunto

$$S = \{(x,y,z,w) \colon x^2 + y^2 = 1 \text{ e } z^2 + w^2 = 1\} \subset \overline{V}.$$

Mostre que $M = \operatorname{front}(V) \setminus S$ é uma variedade. Indique a sua dimensão e determine o plano tangente a M no ponto $(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

5. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $\mathbf{g} \colon U \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1. Mostre que se $A \subset U$ tem medida nula então $\mathbf{g}(A)$ tem medida nula.