# Resumos de AMIII

10 de Dezembro de 2005

## 1. Revisões e Complementos de Cálculo Diferencial

1. Se $U \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^m$ uma função (portanto $\mathbf{f} = (f^1, \ldots, f^m)), \mathbf{x}_0 \in U$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, então a *derivada direccional* de $\mathbf{f}$ segundo $\mathbf{v}$ no ponto $\mathbf{x}_0$ é

$$\partial_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{t} = \frac{d}{dt}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})|_{t=0}$$

(caso o limite exista).

2. A i-ésima *derivada parcial* de $\mathbf{f}$ é a derivada direccional segundo o $i$-ésimo vector da base canónica e escreve-se

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x^i} \equiv \partial_i \mathbf{f} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^i} \\ \ldots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^i} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \partial_i f^1 \\ \ldots \\ \partial_i f^n \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_{\mathbf{e}_i}\mathbf{f}.$$

3. **f** diz-se *diferenciável* em $\mathbf{x}_0$ se existe uma transformação linear $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (representada por uma matriz $m \times n$) tal que

$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0}.$$

4. Se $\mathbf{f}$ é diferenciável em $\mathbf{x}_0$ então

$$\partial_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = D_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}.$$

Em particular, $D\mathbf{f}$ é representada na base canónica pela *matriz Jacobiana*

$$D\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 f^1 & \ldots & \partial_n f^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial_1 f^m & \ldots & \partial_n f^m \end{bmatrix}. \tag{1}$$

5. Uma *norma* num espaço vectorial $V$ é uma função $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_0^+$ satisfazendo os seguintes axiomas:

   (i) $\|\mathbf{x}\| = 0$ sse $\mathbf{x} = 0$,

   (ii) $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$ para todo o $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{x} \in V$,

(iii) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (Desigualdade triangular).

6. Se $f : V \to W$ é uma função entre espaços vectoriais normados, dizemos que
$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$
se
$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|_V < \delta \Rightarrow \|f(\mathbf{x})-\mathbf{b}\|_W < \epsilon.$$
Com esta noção de limite definimos as derivadas direccionais e derivadas de funções entre espaços vectoriais normados como acima.

7. Duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ num espaço vectorial $V$ dizem-se *equivalentes* se existem constantes $A, B > 0$ tais que para todo o $\mathbf{x} \in V$
$$A\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq B\|\mathbf{x}\|_2.$$
Equivalentemente, duas normas são equivalentes se convergência para 0 significa o mesmo em ambas as normas, ou ainda se cada norma é contínua como função $V \to \mathbb{R}_0^+$ com respeito à noção de limite determinada pela outra norma.

8. Num espaço vectorial *de dimensão finita* quaisquer duas normas são equivalentes. Em particular, a noção de diferenciabilidade para uma função entre espaços vectoriais de dimensão finita é independente da escolha das normas nos espaços em questão.

9. Se $V$ é um espaço vectorial de dimensão finita com base $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ e $f\colon \mathbb{R}^n \to V$ é uma função diferenciável, escrevendo
$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m f^i(\mathbf{x})\mathbf{v}_i,$$
a derivada $f'(\mathbf{a})$ (quando existe) é representada pela matriz (1) nas bases canónica de $\mathbb{R}^n$ e $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^m$ de $V$.

10. Escreve-se $L(V, W)$ para o espaço vectorial das transformações lineares entre os espaços vectoriais $V$ e $W$.

11. A *função derivada* de $\mathbf{f}\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é a função $\mathbf{f}'\colon U \to L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ que associa a $\mathbf{a}$ a transformação linear $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$. Uma vez que $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ é um espaço vectorial de dimensão finita, podemos falar da derivada de $\mathbf{f}'$ e mais geralmente definir a derivada de ordem $k$ de $\mathbf{f}$ como uma função
$$\mathbf{f}^{(k)}\colon U \to L(\mathbb{R}^n; L(\mathbb{R}^n; (\ldots; L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)\ldots))).$$

12. Se $V_1, \ldots, V_k, W$ são espaços vectoriais, uma *transformação multilinear*
$$\mathbf{f}\colon V_1 \times \ldots \times V_k \to W$$
é uma função que satisfaz a equação
$$\mathbf{f}(v_1, \ldots, \alpha v_i + \beta v_i', \ldots, v_k) = \alpha\mathbf{f}(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + \beta\mathbf{f}(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_k),$$
ou seja, que é linear em cada variável separadamente. As transformações multilineares formam um espaço vectorial com a soma e o produto escalar definidos por
$$(\alpha\mathbf{f} + \beta\mathbf{g})(v_1, \ldots, v_k) = \alpha\mathbf{f}(v_1, \ldots, v_k) + \beta\mathbf{g}(v_1, \ldots, v_k).$$
Este espaço vectorial é denotado por $L(V_1, \ldots, V_k; W)$.

13. Há um isomorfismo canónico $L(V_1; L(V_2; W)) \to L(V_1, V_2; W)$ definido por

$$\mathbf{g} \mapsto ((v_1, v_2) \mapsto (\mathbf{g}(v_1))(v_2))$$

e com inverso

$$\mathbf{f} \mapsto (v_1 \mapsto (v_2 \mapsto \mathbf{f}(v_1, v_2)))\,.$$

Mediante estes isomorfismos, a derivada de ordem $k$ de uma função $\mathbf{f}\colon V \to W$ identifica-se com uma transformação multilinear

$$\mathbf{f}^{(k)}\colon V \times \ldots \times V \to W.$$

14. O espaço vectorial $V^* = L(V; \mathbb{R})$ diz-se o *dual* do espaço vectorial $V$. O espaço vectorial $\mathcal{T}^k(V) = L(V, \ldots, V; \mathbb{R})$ diz-se o espaço dos *tensores-$k$ covariantes* sobre $V$ (portanto $V^* = \mathcal{T}^1(V)$).
15. Se $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ é uma base para $V$, a *base dual* para $V^*$ é a base $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^k\}$ definida por

$$\mathbf{e}^i\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{e}_j\right) = \alpha_i.$$

16. Dados $\phi_1, \ldots, \phi_k \in V^*$, escrevemos $\phi_1 \otimes \ldots \phi_k \in \mathcal{T}^k(V)$ para o tensor definido pela fórmula

$$(\phi_1 \otimes \ldots \otimes \phi_k)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \phi_1(\mathbf{v}_1)\phi_2(\mathbf{v}_2)\ldots\phi_k(\mathbf{v}_k).$$

17. Se $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ é uma base para $V$,

$$\{\mathbf{e}^{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}^{i_k}\}_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n}$$

é uma base para $\mathcal{T}^k(V)$.

18. Mais geralmente, se $\{\mathbf{e}_{i,j}\}_{i=1,\ldots,n_j}$ são bases para $V_j$ e $\{\mathbf{f}_k\}_{k=1}^m$ é uma base para $W$, as aplicações multilineares

$$\mathbf{e}_1^{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_k^{i_k} \otimes \mathbf{f}_l\colon V_1 \times \ldots V_k \to W$$

definidas pela fórmula

$$(\mathbf{e}_1^{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_k^{i_k} \otimes \mathbf{f}_l)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \mathbf{e}_1^{i_1}(\mathbf{v}_1)\ldots\mathbf{e}_k^{i_k}(\mathbf{v}_k)\mathbf{f}_l$$

formam uma base para $L(V_1, \ldots, V_k; W)$.

19. As derivadas parciais de ordem 2 definem-se pela fórmula

$$\partial_i\partial_j f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)$$

e analogamente para as derivadas de ordem superior.

20. Nas bases canónicas $\{\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ e $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ de $\mathbb{R}^{n*}$, a segunda derivada de uma função $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to R$ é representada pela *matriz Hessiana* de $f$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^n} \end{bmatrix}$$

21. Se $\mathbf{f}\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma função $k$ vezes diferenciável em $\mathbf{x} \in U$, todas as derivadas parciais de ordem $k$ existem em $\mathbf{x}$ e $\mathbf{f}^{(k)}(x) \in \mathcal{T}^k(\mathbb{R}^n)$ é dada pela expressão

$$\mathbf{f}^{(k)}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \frac{\partial f^j}{\partial x^{i_k} \ldots \partial x^{i_1}}(\mathbf{x})\mathbf{e}^{i_1} \otimes \ldots \mathbf{e}^{i_k} \otimes \mathbf{e}_j.$$

22. Se $V$ é um espaço vectorial de dimensão finita, $\mathbf{f}\colon U \subset \mathbb{R}^n \to V$ diz-se de classe $C^k$ se as derivadas parciais de ordem menor ou igual a $k$ das componentes $f^i$ de $\mathbf{f}$ numa base qualquer de $V$ são funções contínuas.
23. Uma função de classe $C^k$ é $k$ vezes diferenciável.
24. *Lema de Schwarz:* Se $f$ é de classe $C^2$, então $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$.
25. Um tensor $T \in \mathcal{T}^k(V)$ diz-se simétrico se

$$T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = T(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k).$$

26. Se $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é de classe $C^k$, $f^{(k)}$ é um tensor simétrico.
27. Se $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $\mathbf{x}_0 \in U$, e $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ é diferenciável em $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \in V$, então $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ é diferenciável em $\mathbf{x}_0$ e

$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}_0) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

Em coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$ em $\mathbb{R}^n$ e $(y^1, \ldots, y^m)$ em $\mathbb{R}^m$, tem-se

$$\frac{\partial g^i}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g^i}{\partial y^k}\frac{\partial f^k}{\partial x^j}$$

(*regra da cadeia*).
28. *Fórmula de Taylor:* Se $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é de classe $C^k$ e $\mathbf{a} + t\mathbf{h} \in U$ para $t \in [0,1]$, existe $\theta \in ]0,1[$ tal que

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a})+f'(\mathbf{a})(\mathbf{h})+\ldots+\frac{1}{(k-1)!}f^{(k-1)}(\mathbf{a})(\mathbf{h},\ldots,\mathbf{h})+\frac{1}{k!}f^{(k)}(\mathbf{a}+\theta\mathbf{h})(\mathbf{h},\ldots,\mathbf{h}).$$

29. Se $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tem um extremo em $\mathbf{a}$ e $f$ é diferenciável em $\mathbf{a}$, então $f'(\mathbf{a}) = 0$.
30. Se $f$ é diferenciável em $\mathbf{a}$ e $f'(\mathbf{a}) = 0$, $\mathbf{a}$ diz-se um *ponto de estacionariedade* ou um *ponto crítico* de $f$. Um ponto crítico que não é um ponto de extremo diz-se um *ponto de sela*.
31. Seja $f$ de classe $C^2$ e $\mathbf{a}$ um ponto crítico de $f$.
    (i) Se $f''(\mathbf{a})(\mathbf{h},\mathbf{h}) > 0$ para todo o $\mathbf{h} \neq 0$ então $\mathbf{a}$ é um ponto de mínimo relativo estrito de $f$.
    (ii) Se $f''(\mathbf{a})(\mathbf{h},\mathbf{h}) < 0$ para todo o $\mathbf{h} \neq 0$ então $\mathbf{a}$ é um ponto de máximo relativo estrito de $f$.
    (iii) Se $\mathbf{a}$ é um ponto de mínimo, então $f''(\mathbf{a})(\mathbf{h},\mathbf{h}) \geq 0$ para todo o $\mathbf{h}$.
    (iv) Se $\mathbf{a}$ é um ponto de máximo, então $f''(\mathbf{a})(\mathbf{h},\mathbf{h}) \leq 0$ para todo o $\mathbf{h}$.
32. Uma vez que $f''(a)(\mathbf{h},\mathbf{h}) = \mathbf{h}^t H(f)\mathbf{h}$ onde $H(f)$ denota a matriz Hessiana de $f$, as condições do ponto anterior são verificadas sse os valores próprios (da matriz simétrica) $H(f)$ são

(i) todos positivos,
(ii) todos negativos,
(iii) todos $\geq 0$,
(iv) todos $\leq 0$.

## 2. Teoremas da função inversa e ímplicita

1. O *jacobiano* de uma função diferenciável $\mathbf{f}\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é a função

$$J\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \det D\mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

2. *Teorema da função inversa* Seja $\mathbf{f}\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe $C^1$ com $D$ aberto. Se $J\mathbf{f}(\mathbf{a}) \neq 0$, então existe um aberto $W \subset D$ com $\mathbf{a} \in W$ tal que
   (i) $\mathbf{f}(W)$ é um aberto,
   (ii) $\mathbf{f}_{|W}$ é injectiva,
   (iii) $\mathbf{f}^{-1}\colon \mathbf{f}(W) \to W$ é de classe $C^1$ e

$$D\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{a})) = D\mathbf{f}(\mathbf{a})^{-1}.$$

3. Seja $(V, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Uma sucessão $\mathbf{x}_n$ em $V$ diz-se uma *sucessão de Cauchy* se

$$\forall_{\epsilon>0} \exists_N n, m > N \Rightarrow \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| < \epsilon.$$

   O espaço $V$ diz-se *completo* ou um *espaço de Banach* se toda a sucessão de Cauchy converge.
4. Seja $D \subset V$. Uma aplicação $\mathbf{f}\colon D \to D$ diz-se uma *contracção* se existe $\lambda < 1$ tal que $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)\| \leq \lambda \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$.
5. $x$ diz-se um *ponto fixo* de uma aplicação $f$ se $f(x) = x$.
6. *Teorema do ponto fixo.* Se $(V, \|\cdot\|)$ é um espaço completo, $D \subset V$ é fechado e $\mathbf{f}\colon D \to D$ é uma contracção, então $\mathbf{f}$ tem um ponto fixo único.
7. Uma função $\mathbf{f}\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua se e só se para todo o aberto $V \subset \mathbb{R}^m$, existe um aberto $W \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$\mathbf{f}^{-1}(V) = W \cap A.$$

   Recorde-se que $\mathbf{f}^{-1}(V) = \{\mathbf{x} \in A\colon \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in V\}$. Uma intersecção de um aberto de $\mathbb{R}^n$ com $A$ diz-se um *aberto em* $A$ pelo que este resultado diz que uma função é contínua sse transforma inversamente abertos em abertos.
8. *Teorema da função implícita* Seja $\mathbf{F}\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função de classe $C^1$ com $n > m$. Escrevemos $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n$ com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-m}$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Dado $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in U$ com $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0$, se

$$\det \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0$$

   existem abertos $V \subset \mathbb{R}^{n-m}$ e $W \subset \mathbb{R}^m$ com $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in V \times W \subset U$ e uma função $\mathbf{g}\colon V \to W$ de classe $C^1$ tal que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \text{ e } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V \times W \Leftrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}).$$

9. As derivadas da função implícita $\mathbf{g}$ no ponto $\mathbf{x}_0$ obtêm-se derivando a equação

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x})) = 0.$$

Obtemos a seguinte equação matricial para a derivada de $\mathbf{g}$:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) = 0.$$

10. Se a função $\mathbf{f}$ no enunciado do Teorema da Função Inversa é de classe $C^k$ (com $1 \leq k \leq \infty$), o mesmo sucede com $\mathbf{f}^{-1}$ e analogamente, se a função $\mathbf{F}$ no enunciado do Teorema da Função Implícita é de classe $C^k$ o mesmo sucede com a função $\mathbf{g}$.

## 3. Variedades

1. O *gráfico* de uma função $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$ é o conjunto

$$\mathrm{Graf}(\mathbf{f}) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \in D \text{ e } \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\}.$$

2. Um conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma *variedade diferenciável de dimensão* $m \in \{1, \ldots, n-1\}$ *e classe* $C^k$ $(k \geq 1)$ se para qualquer ponto $\mathbf{x}_0 \in M$ existe uma vizinhança $U \ni \mathbf{x}_0$ e uma função de classe $C^k$ $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$ ($D$ aberto) tais que

$$M \cap U = \mathrm{Graf}(\mathbf{f}) \cap U$$

para alguma ordenação das funções coordenadas de $\mathbb{R}^n$.

3. Uma variedade de dimensão $0$ é um conjunto do pontos isolados; uma variedade de dimensão $n$ em $\mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto.

4. *Variedades como conjuntos de nível.* $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade diferenciável de dimensão $m$ e classe $C^k$ *sse* para qualquer ponto $\mathbf{x}_0 \in M$ existe um aberto $U \ni \mathbf{x}_0$ e uma função de classe $C^k$ $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ tais que
   (i) $M \cap U = \{\mathbf{x} \in U : \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$;
   (ii) A característica de $D\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$ é $n - m$ (ou seja, é máxima).

5. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade de dimensão $m$, $\mathbf{x} \in M$ e $U \ni \mathbf{x}$ uma vizinhança aberta; $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^m \to M \cap U$ diz-se uma *parametrização* de classe $C^q$ de $M \cap U$ se
   (i) $\mathbf{g}$ é uma bijecção de classe $C^q$,
   (ii) A característica de $D\mathbf{g}(\mathbf{t})$ é $m$ para todo o $\mathbf{t} \in V$,
   (iii) $\mathbf{g}^{-1} : M \cap U \to V$ contínua.[1]

   A aplicação $\mathbf{g}^{-1} \colon M \cap U \to V$ diz-se uma *carta local* para $M$ e o conjunto $M \cap U$ diz-se uma *vizinhança de coordenadas*.

6. *Variedades como conjuntos parametrizáveis.* Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade-$m$ de classe $C^k$ sse para cada $\mathbf{x} \in M$ existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo $\mathbf{x}$ e uma parametrização $\mathbf{g} \colon V \to M \cap U$ de classe $C^k$ com $V$ um aberto de $\mathbb{R}^m$.

7. Um *caminho* é uma aplicação contínua $\mathbf{g} \colon I \to \mathbb{R}^n$ com $I$ um intervalo de $\mathbb{R}$. Um vector $v \in \mathbb{R}^n$ diz-se *tangente* a um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ em $\mathbf{x} \in X$ se existe um caminho diferenciável $\mathbf{g} \colon (-\epsilon, \epsilon) \to X$ com $\mathbf{g}(0) = \mathbf{x}$ e $\mathbf{g}'(0) = v$.

[1] Isto é, para cada $A \subset V$ aberto, existe $W \subset \mathbb{R}^n$ aberto com $\mathbf{g}(A) = W \cap M$.

8. Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade-$m$ e $\mathbf{x}_0 \in M$, o conjunto $T_{\mathbf{x}_0}M$ de todos os vectores tangentes a $M$ em $\mathbf{x}_0$ é um espaço vectorial de dimensão $m$ chamado o *espaço tangente a* $\mathbf{x}_0$ *em* $M$.
9. Se $\mathbf{g}\colon V \to M \cap U$ é uma parametrização com $\mathbf{g}(\mathbf{t}_0) = \mathbf{x}_0$, as colunas de $D\mathbf{g}(\mathbf{t}_0)$ formam uma base de $T_{\mathbf{x}_0}M$.
10. Se $M \cap U = \{\mathbf{x} \in U \colon \mathbf{F}(\mathbf{x} = 0\}$ com $\mathbf{F}$ de classe $C^1$ e $D\mathbf{F}(\mathbf{x})$ sobrejectiva, $T_{\mathbf{x}_0}M$ é o núcleo de $D\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$.
11. Se $M$ é uma variedade e $\mathbf{x}_0 \in M$, o *espaço normal* a $M$ em $\mathbf{x}_0$ é o complemento ortogonal de $T_{\mathbf{x}_0}M$, e denota-se por $T^{\perp}_{\mathbf{x}_0}M$.
12. Se $M$ é localmente definida pela equação $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$ com $\mathbf{F}$ satisfazendo as condições habituais, as linhas de $D\mathbf{F}(\mathbf{x_0})$ formam uma base para $T^{\perp}_{\mathbf{x}_0}M$.
13. *Método dos multiplicadores de Lagrange.* Seja $M$ uma variedade, $f : U \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $\mathbf{x}_0 \in M \cap U$. Para que a restrição de $f$ a $M$ tenha um extremo em $\mathbf{x}_0$ é necessário que $\nabla f(\mathbf{x}_0) \in T^{\perp}_{\mathbf{x}_0}M$.
Dito de outra forma, se $U$ é um aberto contendo $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{F}\colon U \to \mathbb{R}^{n-m}$ é uma função de classe $C^1$ com derivada sobrejectiva e tal que $M \cap U = \{\mathbf{x} \in U \colon \mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0\}$, existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-m} \in \mathbb{R}$ chamados *multiplicadores de Lagrange* tais que
$$\nabla f(\mathbf{x}_0) + \lambda_1 \nabla F^1(\mathbf{x}_0) + \ldots + \lambda_{n-m} \nabla F^{n-m}(\mathbf{x}_0) = 0.$$

## 4. Integral de Riemann

1. $I \subset \mathbb{R}^n$ é um *intervalo* se $I = I_1 \times \ldots \times I_n$, onde cada $I_k$ é um intervalo de $\mathbb{R}$. $I$ é limitado/aberto/fechado *sse* cada $I_k$ é limitado/aberto/fechado. Se $I$ é um intervalo limitado com $I_k = |a_k, b_k|$ (em que $|$ designa aberto ou fechado), o seu *volume $n$-dimensional* é
$$V_n(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_n - a_n).$$
Uma *partição* do intervalo limitado $I \subset \mathbb{R}$ é um conjunto finito $P = P_1 \times \ldots \times P_n$, onde cada $P_k$ é uma partição do intervalo $I_k = |a_k, b_k|$ (i.e., $P_k$ é um subconjunto finito de $I_k$ contendo $a_k, b_k$). Uma partição de $I$ subdivide $I$ num número finito de subintervalos $J_\alpha$. Uma função $s : I \to \mathbb{R}$ diz-se uma *função em escada* se existe uma partição $P$ de $I$ tal que $s$ é constante (igual a $s_\alpha$) no interior de cada subintervalo $J_\alpha$, sendo o seu *integral* o número real
$$\int_I s = \sum_\alpha s_\alpha V_n(J_\alpha). \tag{2}$$
2. Uma partição $P'$ diz-se um *refinamento* de $P$ se $P \subset P'$.
3. O integral de uma função em escada definido em (2) é independente da partição escolhida.
4. Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo limitado e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função *limitada*. O *integral superior* de $f$ em $I$ é o número real
$$\overline{\int_I} f = \inf \left\{ \int_I t : t \text{ é em escada e } t(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in I \right\}.$$
O *integral inferior* de $f$ em $I$ é o número real
$$\underline{\int_I} f = \sup \left\{ \int_I s : s \text{ é em escada e } s(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in I \right\}.$$

A função $f$ diz-se *integrável à Riemann* em $I$ se os seus integrais superior e inferior coincidem, e nesse caso define-se o seu *integral* como sendo

$$\int_I f = \underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f.$$

As seguintes notações são também utilizadas para o integral de $f$:

$$\int_I f = \int_I f dV_n = \int_I f(\mathbf{x}) dV_n(\mathbf{x}) = \int_I f\left(x^1, \ldots, x^n\right) dx^1 \ldots dx^n.$$

5. Uma função em escada é integrável à Riemann e o integral de Riemann é o número definido pela fórmula (2).
6. Se $I$ é um intervalo limitado, $P$ uma partição de $I$ e $\{J_\alpha\}$ são os subintervalos da partição escrevemos
$$m_\alpha = \inf\{f(x) \colon x \in \operatorname{int} J_\alpha\}$$
e
$$M_\alpha = \sup\{f(x) \colon x \in \operatorname{int} J_\alpha\}.$$
A soma superior determinada pela partição é
$$U(f,P) = \sum_\alpha M_\alpha V_n(J_\alpha)$$
e a soma inferior é
$$L(f,P) = \sum_\alpha m_\alpha V_n(J_\alpha).$$
7. Seja $I$ um intervalo limitado. Uma função limitada $f \colon I \to \mathbb{R}$ é integrável à Riemann sse para todo o $\epsilon > 0$ existe uma partição $P$ de $I$ tal que
$$U(f,P) - L(f,P) < \epsilon.$$
8. *Propriedades do integral.* Sejam $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ funções integráveis à Riemann.
   (i) Se $f(x) \leq g(x)$ para todo o $x \in I$ então $\int_I f \leq \int_I g$.
   (ii) Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ é integrável em $I$ e
   $$\int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_I f + \beta \int_I g.$$
   Ou seja, o conjunto das funções integráveis à Riemann é um espaço vectorial e o integral é uma transformação linear.
   (iii) $|f|$ é integrável em $I$ e $\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$.
9. Uma família $\{U_\alpha\}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ diz-se uma *cobertura* de $A \subset \mathbb{R}^n$ se $A \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$. A cobertura diz-se *aberta* se cada um dos conjuntos $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ é aberto. Uma *subcobertura* de $\{U_\alpha\}$ é uma subfamília de $\{U_\alpha\}$ que é ainda uma cobertura de $A$.
10. Diz-se que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ tem *conteúdo nulo* se para todo o $\epsilon > 0$ existe uma cobertura de $A$ por uma família finita $\{I_1, \ldots, I_k\}$ de intervalos limitados tal que
$$\sum_{j=1}^k V_n(I_j) < \epsilon.$$

11. Diz-se que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ tem *medida nula* se para todo o $\epsilon > 0$ existe uma cobertura de $A$ por uma família contável $\{I_1, \ldots, I_k, \ldots\}$ de intervalos limitados tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} V_n(I_j) < \epsilon.$$

12. *Propriedades dos conjuntos de conteúdo nulo e medida nula.*
    (i) Se $A$ tem conteúdo nulo então tem medida nula.
    (ii) Um conjunto com conteúdo nulo é limitado.
    (iii) Se $A \subset B$ e $B$ tem conteúdo (medida) nulo, então $A$ também tem.
    (iv) Uma união finita de conjuntos com conteúdo nulo tem conteúdo nulo.
    (v) Uma união contável de conjuntos com medida nula tem medida nula.
    (vi) O gráfico de uma função contínua $f\colon I \to \mathbb{R}$ com $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo compacto tem conteúdo nulo em $\mathbb{R}^{n+1}$.
    (vii) O gráfico de uma função contínua $f : I \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com $I$ um intervalo qualquer, tem medida nula em $\mathbb{R}^{n+1}$.
    (viii) Um intervalo de $\mathbb{R}^n$ com interior não vazio não tem conteúdo nulo.
13. *Teorema de Heine-Borel:* Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é compacto sse toda a cobertura aberta de $A$ tem uma subcobertura finita.
14. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, então $A$ tem medida nula sse $A$ tem conteúdo nulo.
15. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ tem interior não vazio, então $A$ não tem medida nula.
16. Seja $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função limitada. A *oscilação de $f$ em $D \subset U$* é o número real não negativo

$$o(f, D) = \sup_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x}) - \inf_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x}).$$

    A *oscilação de $f$ no ponto $\mathbf{x} \in U$* é

$$o(f, \mathbf{x}) = \lim_{\delta \to 0^+} o(f, B_\delta(\mathbf{x}) \cap U).$$

17. Uma função $f$ é contínua em $\mathbf{x}$ sse $o(f, \mathbf{x}) = 0$.
18. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ e $P(\mathbf{x})$ uma proposição dependente do ponto $\mathbf{x}$. Diz-se que $P$ é válida *quase em toda a parte em $A$* (abreviado q.t.p. em $A$) se

$$\{\mathbf{x} \in A\colon P(\mathbf{x}) \text{ não é válida.}\}$$

    tem medida nula em $\mathbb{R}^n$.
19. *Critério de integrabilidade de Lebesgue.* Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo compacto. Uma função limitada $f : I \to \mathbb{R}$ é integrável à Riemann sse $f$ é contínua quase em toda a parte em $I$.
20. A *função característica* de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é a função

$$\chi_A(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{x} \in A \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

21. Um conjunto limitado $A \subset \mathbb{R}^n$ diz-se *mensurável à Jordan* se a função $\chi_A$ é integrável nalgum intervalo limitado $I \supset A$ (esta definição é independente da escolha de $I$). O *conteúdo* ou *volume $n$-dimensional* de $A$ é

$$V_n(A) = \int_I \chi_A.$$

22. Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo limitado, $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função limitada e $A \subset I$. Define-se o *integral de $f$ em $A$* por

$$\int_A f = \int_I f\chi_A.$$

Esta definição depende apenas de $A$ e não do intervalo $I$.

23. Se $f, g$ são integráveis em $I$, $fg$ é integrável. Em particular, se $f$ é integrável em $I$ e $A \subset I$ é mensurável à Jordan, $f$ é integrável em $A$.

24. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável à Jordan sse $A$ é limitado e $\mathrm{front}(A)$ tem medida nula.

25. Seja $\mathcal{J}$ a família dos subconjuntos mensuráveis à Jordan em $\mathbb{R}^n$. Dados $A, B \in \mathcal{J}$ tem-se
    (i) $A \cap B \in \mathcal{J}$,
    (ii) $A \setminus B \in \mathcal{J}$,
    (iii) $A \cup B \in \mathcal{J}$,
    (iv) Se $A \cap B = \emptyset$, então $V_n(A \cup B) = V_n(A) + V_n(B)$.

26. *Teorema de Fubini.* Sejam $I \subset \mathbb{R}^n$ e $J \subset \mathbb{R}^m$ são intervalos limitados e $f : I \times J \to \mathbb{R}$ é uma função integrável, então

$$\int_{I\times J} f = \int_I \left( \overline{\int}_J f_{\mathbf{x}} \right) = \int_I \left( \underline{\int}_J f_{\mathbf{x}} \right).$$

onde para $\mathbf{x} \in I$, a função $f_{\mathbf{x}}\colon J \to \mathbb{R}$ é definida por $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Analogamente tem-se

$$\int_{I\times J} f = \int_J \left( \overline{\int}_I f_{\mathbf{y}} \right) = \int_J \left( \underline{\int}_I f_{\mathbf{y}} \right).$$

27. As seguintes notações são usadas para o integral de $f\colon A \to \mathbb{R}$:

$$\int_A f = \int_A f(x^1, \dots, x^n)dx^1 \dots dx^n = \int \cdots \int_A f(x^1, \dots, x^n)dx^1 \dots dx^n = \int_A f(\mathbf{x})dV_n(\mathbf{x}).$$

28. *Aplicações do integral.*
    (i) O *volume $n$-dimensional* de $A$ é

$$V_n(A) = \int_A 1,$$

    (ii) A *média* de uma função $f\colon A \to \mathbb{R}$ é

$$\overline{f} = \frac{1}{V_n(A)} \int_A f,$$

(iii) Se $\rho\colon A \to \mathbb{R}^+$ é a densidade de massa, então a *massa* de $A$ é

$$M = \int_A \rho$$

(iv) A *coordenada $k$ do centro de massa* de $A$ é

$$x^k_{CM} = \frac{1}{M}\int_A x^k \rho,$$

(v) A *coordenada $k$ do centróide* é

$$\overline{x}^k = \frac{1}{V_n(A)}\int_A x^k,$$

(vi) O *momento de inércia* de $A$ em relação ao eixo $\ell$ é

$$I_\ell = \int_A \rho d_\ell^2$$

onde $d_\ell$ é a função distância ao eixo $\ell$.

29. Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo compacto, $f\colon I\times ]a,b[ \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então a função $\varphi\colon ]a,b[ \to \mathbb{R}$ definida pela expressão

$$\varphi(t) = \int_I f(\mathbf{x},t)dV_n(\mathbf{x})$$

é contínua.

30. *Regra de Leibniz.* Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo compacto, e $f\colon I\times ]a,b[ \to \mathbb{R}$ uma função contínua e tal que $\partial_{n+1} f$ existe e é contínua em $I\times ]a,b[$. Então a função $\varphi\colon ]a,b[ \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(t) = \int_I f(\mathbf{x},t)dV_n(\mathbf{x})$$

é de classe $C^1$ e

$$\varphi'(t) = \int_I \partial_{n+1} f(\mathbf{x},t)dV_n(\mathbf{x}).$$

31. O *suporte* de uma função $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})} \subset \mathbb{R}^n.$$

32. *Teorema da partição da unidade.* Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de $A$. Então existe uma família $\Phi$ de funções $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $C^\infty$ e suporte compacto com as seguintes propriedades:

(i) $0 \le \varphi(\mathbf{x}) \le 1$ para todo o $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

(ii) Para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ existe um aberto $U_\mathbf{x}$ tal que apenas um número finito de $\varphi \in \Phi$ não se anula identicamente em $U_\mathbf{x}$.

(iii) Para cada $\mathbf{x} \in A$ tem-se

$$\sum_{\varphi\in\Phi} \phi(\mathbf{x}) = 1$$

(Note-se que esta soma é finita por (ii)).

(iv) Para cada $\varphi \in \Phi$ existe um aberto $U \in \mathcal{U}$ tal que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset U$.

$\Phi$ diz-se uma *partição da unidade subordinada a* $\mathcal{U}$.

33. (i) Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, qualquer partição da unidade $\Phi$ para $A$ contém apenas um número finito de funções que não se anulam identicamente num aberto contendo $A$.

    (ii) Em qualquer partição da unidade $\Phi$ há no máximo um conjunto contável de $\varphi \in \Phi$ que não se anulam identicamente.

34. Uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de um aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ diz-se *admissível* se

$$A = \cup_{U \in \mathcal{U}} U.$$

35. Uma função $f : A \to \mathbb{R}$ diz-se *localmente integrável* se para todo o $\mathbf{x} \in A$ existe um intervalo aberto limitado $I_{\mathbf{x}}$ contendo $\mathbf{x}$ tal que $f_{|I_{\mathbf{x}}}$ é integrável (ou seja, limitada e contínua q.t.p.).

36. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $f : A \to \mathbb{R}$ uma função localmente integrável, $\mathcal{U}$ uma cobertura admissível de $A$ e $\Phi$ uma partição da unidade para $A$ subordinada a $\Phi$. Então $f$ diz-se *integrável em* $A$ se a série de termos positivos

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi |f|$$

converge e nesse caso define-se o integral de $f$ por

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi f.$$

37. Seja $A$ um aberto e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função localmente integrável.

    (i) Se $f$ é integrável no sentido do item anterior e $\Psi$ é outra partição da unidade para $A$ subordinada à cobertura admissível $\mathcal{U}'$, então

$$\sum_{\psi \in \Psi} \int_A |\psi f| < \infty$$

e

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi f = \sum_{\psi \in \Psi} \int_A \psi f.$$

    (ii) Se $A$ é limitado e $f : A \to \mathbb{R}$ é limitada, então $f$ é integrável.

    (iii) Se A é mensurável à Jordan e $f : A \to \mathbb{R}$ é limitada, as duas definições de integral de $f$ estão de acordo.

38. Uma *transformação de coordenadas* é uma aplicação de classe $C^1$, $\mathbf{g} \colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ com $A$ aberto tal que $\mathbf{g}$ é injectiva e $J\mathbf{g}(t) \neq 0$.

39. *Teorema de mudança de variável.* Seja $\mathbf{g} \colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação de coordenadas. Então

$$\int_A f = \int_{\mathbf{g}^{-1}(A)} f \circ \mathbf{g} |J\mathbf{g}|$$

onde a igualdade significa que $f$ é integrável em $A$ sse $f \circ \mathbf{g}|J\mathbf{g}|$ é integrável em $\mathbf{g}^{-1}(A)$ e nesse caso os integrais coincidem.

## 5. Formas diferenciais

1. Se $T \in \mathcal{T}^k(V)$ e $S \in \mathcal{T}^l(V)$, o *produto tensorial* de $T$ e $S$ é o tensor $T \otimes S \in \mathcal{T}^{k+l}(V)$ definido por

$$(T \otimes S)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k+l}) = T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)S(\mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_{k+l}).$$

2. Propriedades do produto tensorial:
   (i) $(S+T) \otimes U = S \otimes U + T \otimes U$,
   (ii) $S \otimes (T+U) = S \otimes T + S \otimes U$,
   (iii) $(cS) \otimes T = c(S \otimes T) = S \otimes (cT)$,
   (iv) $S \otimes (T \otimes U) = (S \otimes T) \otimes U$,
   (v) $S \otimes T \neq T \otimes S$ em geral.

3. Se $\mathbf{f}\colon V \to W$ é uma aplicação linear, o *pullback* de $T \in \mathcal{T}^k(W)$ por $\mathbf{f}$ é o tensor $\mathbf{f}^*(T) \in \mathcal{T}^k(V)$ definido por

$$\mathbf{f}^*(T)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v_k}) = T(\mathbf{f}(\mathbf{v}_1), \ldots, \mathbf{f}(\mathbf{v}_k)).$$

   Tem-se

$$\mathbf{f}^*(T \otimes S) = \mathbf{f}^*(T) \otimes \mathbf{f}^*(S)$$

4. Um tensor $\omega \in \mathcal{T}^k(V)$ diz-se *alternante*, ou *anti-simétrico*, ou um *covector-$k$* se

$$\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_k) = -\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k).$$

   Os tensores alternantes formam um subespaço vectorial de $\mathcal{T}^k(V)$ designado por $\Lambda^k(V)$.

5. O conjunto das permutações do conjunto $\{1, \ldots, k\}$ é designado por $\Sigma_k$. Este conjunto é dotado de um produto (composição de permutações) que é associativo e dispôes de inversos (ou seja $\Sigma_k$ com o produto de composição é um *grupo*).

   Uma *transposição* é uma permutação diferente da identidade que afecta apenas dois elementos $i, j \in \{1, \ldots, k\}$. Qualquer permutação se pode escrever como uma composição de transposições

$$\sigma = \tau_1 \ldots \tau_N$$

   (não de forma única). O *sinal* da permutação $\sigma$ é

$$\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^N.$$

   A paridade do número de transposições na factorização de uma permutação é independente da factorização pelo que o sinal da permutação está bem definido.

   Note-se que $\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\eta) = \operatorname{sgn}(\sigma\eta)$.

6. Um tensor $T \in \mathcal{T}^k(V)$ é alternante sse para todo o $\sigma \in \Sigma_k$ se tem

$$T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \operatorname{sgn}(\sigma)T(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{v}_{\sigma(k)}).$$

7. Define-se a aplicação

$$\operatorname{Alt}\colon \mathcal{T}^k(V) \to \mathcal{T}^k(V)$$

   pela fórmula

$$\operatorname{Alt}(T)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \operatorname{sgn}(\sigma)T(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{v}_{\sigma(k)}).$$

8. Propriedades de $\mathrm{Alt}$:
   (i) Se $T \in \mathcal{T}^k(V)$, então $\mathrm{Alt}(T) \in \Lambda^k(V)$,
   (ii) $\mathrm{Alt}$ é linear,
   (iii) Se $T \in \Lambda^k(V)$ então $\mathrm{Alt}(T) = T$.

   Ou seja, $\mathrm{Alt}$ é uma projecção de $\mathcal{T}^k(V)$ no subespaço $\Lambda^k(V)$.
9. O *produto exterior* de $\omega \in \Lambda^k(V)$ e $\eta \in \Lambda^l(V)$ é o covector-$k+l$
$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!\, l!} \mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta) \in \Lambda^{k+l}(V).$$
10. Propriedades do produto exterior:
    (i) $\omega \wedge (\alpha + \beta) = \omega \wedge \alpha + \omega \wedge \beta$,
    (ii) $\omega \wedge (c\alpha) = c(\omega \wedge \alpha)$,
    (iii) Se $\omega \in \Lambda^k(V)$ e $\eta \in \Lambda^l(V)$, então $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$.
    (iv) $\omega \wedge (\eta \wedge \theta) = (\omega \wedge \eta) \wedge \theta$,
    (v) Se $\mathbf{f}\colon V \to W$ é uma aplicação linear, então $\mathbf{f}^*(\omega \wedge \eta) = \mathbf{f}^*(\omega) \wedge \mathbf{f}^*(\eta)$.
11. Se $\{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$ é uma base para $V^* = \Lambda^1(V)$, então
$$\{\varphi^{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi^{i_k} \colon 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n\}$$
    é uma base para $\Lambda^k(V)$. Em particular
$$\dim \Lambda^k(V) = \binom{n}{k}$$
    e $\Lambda^k(V) = \{0\}$ para $k > n$.
12. Dados $\varphi^i \in \Lambda^1(V)$ tem-se
$$\varphi^1 \wedge \ldots \wedge \varphi^k = \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \mathrm{sgn}(\sigma) \varphi^{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes \varphi^{\sigma(k)}.$$
13. O tensor alternante $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) \mapsto \det[\mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_n]$ que designamos simplesmente por $\det$ é uma base de $\Lambda^n(\mathbb{R}^n)$.
14. Seja $V$ um espaço de dimensão $n$ e $\omega \in \Lambda^n(V)$. Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}, \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\} \subset V$ e
$$\mathbf{w}_i = \sum_{j=1}^{n} a_i^j \mathbf{v}_j$$
    então
$$\omega(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n) = \det(a_j^i) \omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n).$$
15. Diz-se que duas bases $\{\mathbf{v}_i\}$ e $\{\mathbf{w}_i\}$ de $V$ *têm a mesma orientação* se, quando escrevemos $\mathbf{w}_i = \sum_{j=1}^n a_i^j \mathbf{v}_j$, obtemos $\det(a_j^i) > 0$. Caso contrário diz-se que as bases têm a *orientação oposta*.
16. Uma *orientação* de um espaço vectorial é um conjunto de bases
$$[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n] = \{\ \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\} \colon \{\mathbf{w}_i\}_{i=1}^n \text{ tem a mesma orientação que } \{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n\ \}.$$
    Um espaço vectorial tem precisamente duas orientações.

17. Um elemento $\omega \in \Lambda^n(V) \setminus 0$ determina uma orientação de $V$

$$\{\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\} \colon \omega(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n) > 0\}.$$

Consequentemente uma orientação de $V$ corresponde precisamente a um elemento não nulo de $\Lambda^n(V)$ a menos de multiplicação por um escalar positivo.

18. Se $V$ é um espaço vectorial de dimensão $n$ com um produto interno e uma orientação, o *elemento volume* de $V$ é o único elemento $\omega \in \Lambda^n(V)$ tal que

$$\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = 1$$

para toda a base ortonormada $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ com a orientação dada de $V$.

19. O elemento volume de $\mathbb{R}^n$ com o produto interno usual e a orientação canónica $[\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n]$ é o determinante.

20. Temos a seguinte fórmula para os elementos da base canónica de $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$:

$$(\mathbf{e}_1^i \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}^{i_k})(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \det(v_l^{i_j})$$

Isto é, se $(v_l^m)$ é a matriz $n \times k$ que tem por colunas as componentes dos $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{e}_1^i \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}^{i_k}$ calcula o determinante da matriz $k \times k$ desta matriz determinada pelas linhas $(i_1, \ldots, i_k)$ de $(v_l^m)$.
Em particular

$$\det = \mathbf{e}^1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}^n.$$

21. Há uma identificação natural entre um espaço vectorial $V$ de dimensão finita e o dual do seu dual $(V^*)^*$ dada por

$$\mathbf{v} \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(v)) .$$

Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ é uma base de $V$ e $\{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$ é a base dual de $V^*$, então a aplicação anterior envia $\mathbf{v}_i$ no $i$-ésimo elemento da base de $(V^*)^*$ dual a $\{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$.

22. Um *multivector-$k$* é um elemento de $\Lambda^k(V^*)$. Identificamos os multivectores-$1$ com os vectores pelo isomorfismo do ponto anterior, logo se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é uma base para $V$, uma base para $\Lambda^k(V^*)$ é dada por

$$\{\mathbf{v}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{v}_{i_k} \colon 1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n\} .$$

23. Se $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, o *espaço tangente* a $U$ é o conjunto

$$TU = \coprod_{p \in U} T_p(U) \cong U \times \mathbb{R}^n$$

onde $\coprod$ denota a união disjunta. Escrevemos $\mathbf{v}_p$ para o elemento $(p, \mathbf{v})$ em $T_pU \subset TU$.

24. Da mesma maneira definimos

$$\Lambda^k(TU) = \coprod_{p \in U} \Lambda^k(T_p(U)) \cong U \times \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$$

e escrevemos $\alpha_p$ para um elemento $(p, \alpha) \in \Lambda^k(TU)$.

25. Um *campo vectorial* em $U$ é uma aplicação $\vec{F}\colon U \to TU$ da forma

$$\vec{F}(p) = (F^1(p), \ldots, F^n(p))_p$$

Uma *forma diferencial de grau* $k$ ou simplesmente uma *forma-*$k$ é uma aplicação

$$\omega\colon U \to \Lambda^k(TU)$$

que associa a $p \in U$ um covector $\omega_p \in \Lambda^k(T_pU)$. Qualquer forma diferencial se pode escrever de maneira única na forma

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \omega_{i_1 \ldots i_k}(\mathbf{x}) \mathbf{e}^{i_1}_{\mathbf{x}} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}^{i_k}_{\mathbf{x}}$$

com $\omega_{i_1 \ldots i_k}\colon U \to \mathbb{R}$. A forma diz-se de classe $C^m$ se as suas componentes $\omega_{i_1 \ldots i_k}$ são funções de classe $C^m$. O espaço vectorial das formas-$k$ de classe $C^\infty$ em $U$ é denotado por $\Omega^k(U)$.

26. Por convenção, uma forma-$0$ é uma função. Assim $\Omega^0(U) = C^\infty(U)$. Também por convenção, o produto exterior de uma forma-$0$ $g$ por uma forma-$k$ $\omega$ é simplesmente o produto

$$g \wedge \omega = g\omega.$$

27. Se $f : U \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, a sua *derivada exterior* é a forma-$1$ determinada pela expressão

$$v_p \mapsto \frac{\partial f}{\partial v}(p).$$

Em termos da base canónica de $\Lambda^1(T_pE) = (T_pE)^*$ a derivada exterior escreve-se

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\, \mathbf{e}^i.$$

Note-se que se $f$ é a $i$-ésima função coordenada

$$(x^1, \ldots, x^n) \mapsto x^i$$

então $df$ é a forma diferencial que associa a cada $p \in U$ o covector $\mathbf{e}^i_p$. Esta forma diferencial é denotada por $dx^i$ e por essa razão qualquer forma-$k$ se escreve

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \omega_{i_1 \ldots i_k}(\mathbf{x}) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

28. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ são abertos, $\mathbf{f} : U \to V$ é $C^\infty$ e $\omega \in \Omega^k(V)$. A derivada de $\mathbf{f}$ determina para cada $\mathbf{x}$ uma aplicação

$$T_{\mathbf{x}}U \to T_{\mathbf{f}(\mathbf{x})}V$$

dada pela expressão

$$\mathbf{v}_{\mathbf{x}} \mapsto (D\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{v})_{\mathbf{f}(\mathbf{x})}.$$

Para $k \geq 1$ definimos o *pull-back* de $\omega$ por $\mathbf{f}$ é a forma-$k$ $\mathbf{f}^*\omega \in \Omega^k(U)$ definida por

$$\mathbf{f}^*\omega(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \omega(\mathbf{f}(\mathbf{x}))(D\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{v}_1, \ldots, D\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{v}_k)$$

para $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in T_{\mathbf{x}}U$.
Se $k = 0$, o pullback de uma forma-$0$ $g$ é a função $\mathbf{f}^*(g) = g \circ \mathbf{f}$.

29. *Propriedades do pull-back:*
    (i) $\mathbf{f}^*(\omega+\eta)=\mathbf{f}^*\omega+\mathbf{f}^*\eta$;
    (ii) $\mathbf{f}^*(\omega\wedge\eta)=\mathbf{f}^*\omega\wedge\mathbf{f}^*\eta$;
    (iii) $\mathbf{f}^*\mathbf{g}^*\omega=(\mathbf{g}\circ\mathbf{f})^*(\omega)$.
30. Se $U\subset\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{f}\colon U\to\mathbb{R}^n$ é uma função de classe $C^\infty$, tem-se

$$\mathbf{f}^*(h(\mathbf{x})dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n)=\det D\mathbf{f}(\mathbf{x})h(\mathbf{x})dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n.$$

31. Se $U\subset\mathbb{R}^n$ é aberto e $\omega\in\Omega^k\left(U\right)$,

$$\omega(\mathbf{x})=\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}\omega_{i_1\ldots i_k}(\mathbf{x})dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k},$$

a sua *derivada exterior* $d\omega\in\Omega^{k+1}\left(U\right)$ é dada por

$$d\omega=\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}\sum_{i=1}^n\partial_i\,\omega_{i_1\ldots i_k}dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}.$$

32. *Propriedades da derivada exterior:*
    (i) $d(\omega+\eta)=d\omega+d\eta$;
    (ii) $d(\omega\wedge\eta)=d\omega\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge d\eta$, onde $\omega\in\Omega^k\left(\mathbb{R}^n\right)$;
    (iii) $d(d\omega)=0$ (abreviadamente, $d^2=0$);
    (iv) $d(\mathbf{f}^*\omega)=\mathbf{f}^*(d\omega)$.
33. Seja $U\subset\mathbb{R}^n$. Uma forma $\omega\in\Omega^k(U)$ diz-se *fechada* se $d\omega=0$. Diz-se *exacta* se existe $\eta\in\Omega^{k-1}(U)$ tal que $d\eta=\omega$. Nesse caso diz-se que $\eta$ é um *potencial* para $\omega$.
34. Uma forma exacta é fechada.
35. Um conjunto $A\subset\mathbb{R}^n$ diz-se *um conjunto em estrela* se existe $\mathbf{a}\in A$ tal que para todo o $\mathbf{x}\in A$ se tem

$$\{t\mathbf{a}+(1-t)x\colon t\in[0,1]\}\subset A.$$

36. *Lema de Poincaré:* Se $U\subset\mathbb{R}^n$ é um conjunto em estrela, então toda a forma fechada em $U$ é exacta.
37. Se $U\subset\mathbb{R}^3$, as formas-3 podem ser identificadas com funções

$$f(x,y,z)dx\wedge dy\wedge dz\longleftrightarrow f(x,y,z)$$

as formas-1 com campos vectoriais

$$\omega_{\mathbf{F}}=F^1(x,y,z)dx+F^2(x,y,z)dy+F^3(x,y,z)dz\longleftrightarrow\mathbf{F}=(F^1,F^2,F^3)$$

e as formas-2 também com campos vectoriais

$$\Omega_{\mathbf{F}}=F^1(x,y,z)dy\wedge dz+F^2(x,y,z)dz\wedge dx+F^3(x,y,z)dx\wedge dy\longleftrightarrow\mathbf{F}=(F^1,F^2,F^3).$$

Usando estas identificações, a derivada exterior define os seguintes operadores:

i. O *gradiente* de uma função $f$ é o campo vectorial $\operatorname{grad} f = \nabla f$ definido por

$$\omega_{\nabla f} = df$$

ou seja

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

ii. O *rotacional* de um campo vectorial $\vec{F}$ é o campo vectorial $\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$ definido por

$$\Omega_{\nabla \times \vec{F}} = d\omega_{\vec{F}}$$

ou seja

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2 & \mathbf{e}^3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F^1 & F^2 & F^3 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial F^3}{\partial y} - \frac{\partial F^2}{\partial z}, -\frac{\partial F^3}{\partial x} + \frac{\partial F^1}{\partial z}, \frac{\partial F^2}{\partial x} - \frac{\partial F^1}{\partial y} \right)$$

iii. A *divergência* de um campo vectorial $\vec{F}$ é a função $\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$ definida por

$$d\Omega_{\vec{F}} = (\operatorname{div} \vec{F}) dx \wedge dy \wedge dz$$

ou seja

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F^1}{\partial x} + \frac{\partial F^2}{\partial y} + \frac{\partial F^3}{\partial z}.$$

iv. Tem-se $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$, $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0$. Se $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ diz-se que $\vec{F}$ é um *campo fechado*, e se existe $f$ tal que $\vec{F} = \operatorname{grad} f$ diz-se que $\vec{F}$ é um campo *gradiente* ou *conservativo* e que $f$ é um *potencial escalar* para $\vec{F}$. Um campo $\vec{F}$ tal que $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ diz-se *solenoidal*. Se existe $\vec{A}$ tal que $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{A}$, $\vec{A}$ chama-se um *potencial vector* para $\vec{F}$.

## 6. Integração em variedades

1. Seja $M$ uma variedade de classe $C^k$ e $\mathbf{g}_i \colon U_i \to M$ com $i = 1, 2$ parametrizações de classe $C^k$ com $\mathbf{g}_1(U_1) \cap \mathbf{g}_2(U_2) \neq \emptyset$. Então

$$\mathbf{g}_2^{-1} \circ \mathbf{g}_1 \colon \mathbf{g}_1^{-1}(\mathbf{g}_1(U_1) \cap \mathbf{g}_2(U_2)) \to \mathbf{g}_2^{-1}(\mathbf{g}_1(U_1) \cap \mathbf{g}_2(U_2))$$

é uma função de classe $C^k$ e $J(\mathbf{g}_2^{-1} \circ \mathbf{g}_1)(\mathbf{t}) \neq 0$.

2. Uma *orientação* $\mu$ de uma variedade $M$ consiste numa escolha de orientação $\mu_p$ para cada espaço tangente $T_pM$ satisfazendo a seguinte condição

   - Para qualquer parametrização $\mathbf{g} \colon U \to M$ com $U \subset \mathbb{R}^m$ conexo e $\mathbf{t}, \mathbf{s} \in U$

$$\mu_{\mathbf{g}(\mathbf{t})} = [\partial_1 \mathbf{g}(\mathbf{t}), \ldots, \partial_m \mathbf{g}(\mathbf{t})] \text{ sse } \mu_{\mathbf{g}(\mathbf{s})} = [\partial_1 \mathbf{g}(\mathbf{s}), \ldots, \partial_m \mathbf{g}(\mathbf{s})]$$

onde $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m]$ designa a orientação determinada pela base $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$.
Se existir uma orientação para $M$, $M$ diz-se *orientável*.

3. Se $\mathbf{g}\colon U \to M$ é uma parametrização,

$$\mu_{\mathbf{g}(\mathbf{t})} = [\partial_1 \mathbf{g}(\mathbf{t}), \ldots, \partial_m \mathbf{g}(\mathbf{t})]$$

   determina uma orientação da vizinhança de coordenadas $\mathbf{g}(U)$, dita a *orientação induzida por* $\mathbf{g}$.

4. Se $\mu$ é uma orientação para $M$ e a orientação induzida por uma parametrização $\mathbf{g}$ coincide com $\mu$ em $\mathbf{g}(U)$ diz-se que $\mathbf{g}$ é *compatível com a orientação* $\mu$.

5. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade-$m$. As seguintes afirmações são equivalentes:
   (i) $M$ é orientável,
   (ii) Existe $\omega \in \Omega^m(\mathbb{R}^n)$ tal que $\omega_{|T_pM} \neq 0$ para todo o $p \in M$,
   (iii) Existe $\omega \in \Omega^m(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathbf{g}^*\omega(\mathbf{t}) \neq 0$ para toda a parametrização $\mathbf{g}$ e parâmetro $\mathbf{t}$.
   (iv) Para quaisquer duas parametrizações $\mathbf{g}_i\colon U_i \to M$ com $i = 1, 2$, $J(\mathbf{g}_2^{-1} \circ \mathbf{g}_1)(\mathbf{t})$ tem sinal constante.
   (v) Existe uma cobertura de $M$ por vizinhanças de coordenadas $\mathbf{g}_i(U_i)$ tais que $J(\mathbf{g}_i^{-1} \circ \mathbf{g}_j)(\mathbf{t}) > 0$ sempre que esta função esteja definida.

6. Uma forma $\omega \in \Omega^m(\mathbb{R}^n)$ tal que $\omega_{|T_pM} \neq 0$ para todo o $p$ determina a orientação $\mu_p$ formada pelas bases $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ de $T_pM$ para as quais

$$\omega_p(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m) > 0.$$

7. Uma variedade orientável conexa tem exactamente duas orientações.

8. Uma variedade-$1$ é orientável sse admite um campo vectorial tangente contínuo e que nunca se anula. [2]

9. Uma variedade-$(n-1)$ em $\mathbb{R}^n$ é orientável sse admite um campo vectorial normal

$$\mathbf{n}\colon M \to \mathbb{R}^n \quad \text{com } \mathbf{n}(p) \in T_p(M)^\perp$$

   contínuo e que nunca se anula.
   A orientação $\mu_p$ determinada pelo vector normal $\mathbf{n}(p)$ é a determinada pela forma $\Omega_{\mathbf{n}} \in \Omega^{n-1}(M)$. Equivalentemente, $\mu_p$ é formada pelas bases $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}\}$ de $T_pM$ tais que

$$\mathbf{n}(p) \cdot (\mathbf{v}_1 \times \ldots \times \mathbf{v}_{n-1}) > 0.$$

10. A orientação positiva de $\mathbb{R}^n$ é a orientação determinada pela base canónica, ou equivalentemente, a orientação determinada pela forma $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$. Se $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, $U^+$ designa o aberto $U$ com a orientação positiva. Se $\omega = f(\mathbf{x})dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ é uma forma-$m$ define-se

$$\int_{U^+} \omega = \int_U f.$$

11. Seja $M$ uma variedade-$m$ com orientação $\mu$, $\mathbf{g}\colon U \to M$ uma parametrização compatível com a orientação, $A \subset \mathbf{g}(U)$, e $\omega \in \Omega^m(A)$. Define-se o *integral da forma-$m$ $\omega$ sobre a variedade $M$ com orientação $\mu$* pela fórmula

$$\int_{M^\mu} \omega = \int_{U^+} \mathbf{g}^*(\omega).$$

[2] Pode mostrar-se que toda a variedade-1 é orientável.

O integral é independente da escolha de parametrização compatível com a orientação. Além disso, designando por $-\mu$ a orientação oposta a $\mu$ tem-se

$$\int_{M^{-\mu}} \omega = -\int_{M^{\mu}} \omega.$$

12. Seja $M$ uma variedade-$m$ com orientação $\mu$, $\mathcal{U} = \{\mathbf{g}_i(U_i)\}$ uma cobertura numerável de $M$ por vizinhanças de coordenadas e $\Phi$ uma partição da unidade subordinada à cobertura $\mathcal{U}$. Se $A \subset M$ e $\omega \in \Omega^m(A)$, diz-se que $\omega$ é integrável em $A$ se a série

$$\sum_{\phi_i \in \Phi} \int_{U_i \cap \mathbf{g}_i^{-1}(A)} |\mathbf{g}_i^*(\phi_i \omega)|$$

converge e nesse caso define-se o integral

$$\int_{A^{\mu}} \omega = \sum_{\phi_i \in \Phi} \int_{A \cap \mathbf{g}_i(U_i)^{\mu}} \phi_i \omega.$$

Esta definição é independente das escolhas da cobertura e da partição da unidade.

13. É possível demonstrar que se $M$ é uma variedade-$m$ existe uma vizinhança de coordenadas $U$ tal que $M \setminus U$ tem medida $m$-dimensional nula (isto é a imagem deste conjunto por qualquer carta tem medida $m$-dimensional nula), logo para calcular um integral de uma forma nunca é necessário recorrer a uma partição da unidade.
14. Seja $M$ uma variedade-$m$ em $\mathbb{R}^n$ com uma orientação $\mu$. O *elemento de volume* de $M$ $dV_m$ é a forma-$m$ sobre $M$ que associa a cada $p \in M$ o elemento volume de $T_pM$ determinado pela orientação $\mu_p$ e pelo produto interno em $\mathbb{R}^n$ restrito a $T_pM$.
15. Se $\mathbf{g}\colon U \to M$ é uma parametrização compatível com a orientação de $M$ e $dV_m$ é o elemento volume de $M$, tem-se

$$\mathbf{g}^*(dV_m) = \sqrt{\det(g_{ij})}dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^m$$

onde $(g_{ij}) = (\partial_i \mathbf{g} \cdot \partial_j \mathbf{g}) = D\mathbf{g}^t D\mathbf{g}$.

16. Se $M$ é uma variedade-1 o elemento volume também se escreve $ds$ e a fórmula anterior é

$$\mathbf{g}^*(ds) = \|\mathbf{g}'(t)\| dt.$$

17. Se $M$ é uma variedade-$(n-1)$ em $\mathbb{R}^n$, tem-se

$$\mathbf{g}^*(dV_{n-1}) = \|\partial_1 \mathbf{g} \times \ldots \times \partial_{n-1}\mathbf{g}\| dt^1 \wedge \ldots dt^{n-1}.$$

Se $n = 3$ o elemento de volume também se escreve $dS$.

18. Se $M$ é uma variedade-$m$ em $\mathbb{R}^n$ com orientação $\mu$ e $A \subset M$ define-se o integral de uma função (ou campo escalar) $f : A \to \mathbb{R}$ por

$$\int_A f = \int_{A^{\mu}} f dV_m$$

caso este integral exista. Este integral é independente da escolha de orientação para $M$.

19. Uma vez que existe sempre uma vizinhança de coordenadas $U$ de $M$ cujo complementar tem medida $m$-dimensional nula, pode definir-se o integral de um campo escalar sobre uma variedade não orientável por meio do integral de $f$ sobre $U$.

20. *Aplicações do integral de um campo escalar:*
    (i) O *volume* $m$ dimensional de $M$ é $V_m(M) = \int_M 1$,
    (ii) As *coordenadas do centróide* de $M$ são dadas por
    $$\overline{x}_i = \frac{1}{V_m(M)} \int_M x^i.$$
    (iii) Se $\sigma \colon M \to \mathbb{R}^+$ é uma função densidade de massa, a *massa* de $M$ é dada pelo integral
    $$M = \int_M \sigma.$$
    (iv) As *coordenadas do centro de massa* são dadas por
    $$x^i_{CM} = \frac{1}{M} \int_M x^i \sigma.$$
    (v) O *momento de inèrcia* de $M$ em relação ao eixo $\ell$ é
    $$I_\ell = \int_M \sigma d_\ell^2$$
    onde $d_\ell$ é a função distância ao eixo.

21. *Integral de linha de um campo vectorial.* Seja $M$ uma variedade-1 em $\mathbb{R}^n$ com orientação $\mu$ e $\vec{F} \colon M \to \mathbb{R}^n$. Define-se o integral de linha de $\vec{F}$ ao longo de $M$ percorrida no sentido determinado por $\mu$ pela fórmula
    $$\int_M \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{M^\mu} \omega_{\vec{F}}$$
    onde $\omega_{\vec{F}} = F^1 dx^1 + \ldots + F^n dx^n$. Se $\vec{t} \colon M \to \mathbb{R}^n$ é um campo vectorial tangente unitário tal que $\vec{t}(p) \in \mu_p$ para cada $p \in M$, tem-se
    $$\int_M \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_M (\vec{F} \cdot \vec{t}) \; ds.$$
    Se $\mathbf{g} \colon ]a, b[ \to M$ é uma parametrização compatível com a orientação $\mu$ tem-se
    $$\int_{\mathbf{g}(]a,b[)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\mathbf{g}(t)) \cdot \mathbf{g}'(t) dt.$$

22. *Interpretação física do integral de linha.* Se $\vec{F}$ é um campo de forças e $M$ a trajectória de uma partícula, $\int_M \vec{F} \cdot d\vec{r}$ representa o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ sobre a partícula ao longo da trajectória.

23. *Fluxo de um campo vectorial através de uma hiper-superfície.* Seja $M$ uma variedade-$(n-1)$ em $\mathbb{R}^n$ e $\vec{n}: M \to \mathbb{R}^n$ um campo vectorial normal unitário. O *fluxo* de $\vec{F}$ através de $M$ no sentido dado por $\vec{n}$ é
$$\int_M \vec{F} \cdot \vec{n} dV_{n-1} = \int_{M^\mu} \Omega_{\vec{F}}$$
onde $\Omega_{\vec{F}} = F^1 dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n + \ldots + (-1)^{n-1} F^n dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1}$ e $\mu$ denota a orientação de $M$ determinada por $\vec{n}$. Como a notação indica, o fluxo coincide com o integral do campo escalar $\vec{F} \cdot \vec{n}$ sobre $M$.

24. *Interpretação física do fluxo.* Se $\vec{F} = \rho \vec{v}$ é a densidade de fluxo de um fluido (onde $\rho$ denota a densidade e $\vec{v}$ a velocidade) então o fluxo de $\vec{F}$ através de uma superfície $M$ é a quantidade de matéria que atravessa a superfície por unidade de tempo.

25. Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade-$(n-1)$ e $\mathbf{g}\colon U \to M$ é uma parametrização compatível com a orientação induzida pela normal unitária $\vec{n}$, tem-se
$$\int_{\mathbf{g}(U)} \vec{F} \cdot \vec{n} dV_{n-1} = \int_U \vec{F}(\mathbf{g}(\mathbf{t})) \cdot (\partial_1 \mathbf{g} \times \ldots \times \partial_{n-1} \mathbf{g}).$$

26. Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade-$m$ de classe $C^k$ sse para todo o $p \in M$ existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo $p$, um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ contendo $0$ e um difeomorfismo de classe $C^k$ (isto é, uma função de classe $C^k$ com inversa de classe $C^k$) $\varphi\colon V \to U$ tal que $\varphi(0) = p$ e
$$\varphi(\{\mathbf{x} \in V\colon x^{m+1} = \ldots = x^n = 0\}) = M \cap U.$$

27. Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ diz-se uma *variedade-$m$ com bordo* de classe $C^k$ se para cada $p \in M$ existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo $p$, um aberto $V \subset \mathbb{R}^m$ contendo $0$ e um difeomorfismo $\varphi\colon V \to U$ satisfazendo uma das seguintes condições:
   (i) $\varphi(\{\mathbf{x} \in V\colon x^{m+1} = \ldots = x^n = 0\}) = M \cap U$,
   (ii) $\varphi(\{\mathbf{x} \in V\colon x^1 \leq 0, x^{m+1} = \ldots = x^n = 0\}) = M \cap U$.

   Note-se que pelo teorema da função inversa, as duas condições são mutuamente exclusivas. Os pontos que satisfazem a segunda condição dizem-se os pontos do *bordo de $M$* e formam o conjunto $\partial M$. Os restantes formam o *interior de $M$* que se nota $\dot{M}$.

28. Se $M$ é uma variedade-$m$ com bordo, $\dot{M}$ é uma variedade-$m$ e $\partial M$ é uma variedade-$(m-1)$.

29. Uma variedade-$m$ com bordo $M$ diz-se orientável se $\dot{M}$ o for e nesse caso uma orientação de $M$ é, por definição, uma orientação para $\dot{M}$. O *integral de uma forma-$m$* sobre $M$ com orientação $\mu$ é definido por
$$\int_{M^\mu} \omega = \int_{\dot{M}^\mu} \omega.$$

30. Seja $m > 1$. Se $\mu$ é uma orientação para $M$, e $\varphi: V \to U$ é um difeomorfismo como em (ii) na definição de variedade com bordo tal que a parametrização
$$(t^1, \ldots, t^m) \mapsto \varphi(t^1, \ldots, t^m, 0, \ldots, 0)$$
é compatível com a orientação $\mu$ (para $t^1 < 0$), a *orientação induzida por $\mu$ no bordo $\partial M$* é a orientação determinada pelas parametrizações do bordo
$$(t^2, \ldots, t^m) \mapsto \varphi(0, t^2, \ldots, t^m, 0, \ldots, 0).$$

Estas orientações em vizinhanças de coordenadas para $\partial M$ definem de facto uma orientação em $\partial M$ que é ainda denotada por $\mu$.

Uma orientação de uma variedade-$0$ (que é um conjunto de pontos isolados) é uma atribuição a cada ponto de um sinal $\pm$. A orientação determinada no bordo de uma variedade-$1$ $C$ é a atribuição do sinal $+$ a um ponto do bordo para o qual exista um difeomorfismo como em $(ii)$ tal que $t^1 \mapsto \varphi(t^1, 0, \ldots, 0)$ seja compatível com a orientação dada a $C$ e a atribuição do sinal $-$ aos restantes.

31. Se $M$ é uma variedade-$n$ com bordo, (portanto $\dot{M}$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$) a orientação induzida pela orientação positiva de $M$ em $\partial M$ é a correspondente à *normal* a $\partial M$ que aponta para o *exterior* de $M$.

32. Se $M$ é uma variedade-$2$ com bordo em $\mathbb{R}^3$, com orientação dada por uma normal unitária $\vec{n}$, a orientação induzida no bordo é dada pela regra da mão direita.

33. **Teorema de Stokes:** Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade-$m$ com bordo compacta e com orientação $\mu$ e $\omega \in \Omega^{m-1}$ uma forma de classe $C^1$ em $M$. Então

$$\int_{M^\mu} d\omega = \int_{\partial M^\mu} \omega.$$

34. Se $M$ é uma variedade-$m$ compacta então

$$\oint_M d\omega = 0.$$

(O símbolo $\oint$ usa-se para recordar que $M$ é fechada, isto é, que não tem bordo.)

35. O Teorema de Stokes diz-nos em particular que

    - Se $\omega$ é uma forma-$m$ *fechada* de classe $C^1$, podemos "deformar"a variedade-$m$ $M_1$ em que estamos a integrar noutra variedade $M_2$ com o mesmo bordo *desde que* exista uma variedade-$(m+1)$ $W$ contida no domínio de $\omega$ tal que $\partial W = M_1 \cup M_2$.
    - Se $\omega$ é uma forma *exacta* de classe $C^1$ o integral de $\omega$ só depende do bordo da variedade de integração e portanto podemos substituir a variedade $M_1$ em que estamos a integrar por qualquer outra variedade $M_2$ com o mesmo bordo.

36. O Teorema de Stokes dá-nos imediatamente os seguintes Teoremas fundamentais do cálculo para os integrais de campos vectoriais:

    (i) *Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha:* Se $\vec{\mathbf{F}} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um campo gradiente (isto é $\vec{\mathbf{F}} = \nabla\varphi$ com $\varphi$ de classe $C^1$) e $C \subset U$ é uma variedade-$1$ com bordo
    $$\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \varphi(b) - \varphi(a)$$
    onde $\partial C = b - a$. Em particular, o integral de linha de um campo gradiente depende apenas dos pontos inicial e final do caminho de integração.

    (ii) *Teorema da Divergência:* Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade-$n$ com bordo, e $\vec{\mathbf{F}} : V \to \mathbb{R}^n$ um campo vectorial de classe $C^1$. Então
    $$\int_V \operatorname{div} \vec{\mathbf{F}} = \int_{\partial V} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} dV_{n-1}$$

onde $\vec{\mathbf{n}}$ designa a normal exterior a $V$, e

$$\operatorname{div}\vec{\mathbf{F}} = \frac{\partial F^1}{\partial x^1} + \ldots + \frac{\partial F^n}{\partial x^n}.$$

Para $n = 3$ o Teorema da divergência chama-se também Teorema de Gauss (ou Teorema de Gauss-Ostrogradsky).

(iii) *Teorema de Green:* Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ uma variedade-2 com bordo e

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$$

um campo vectorial de classe $C^1$. Então

$$\iint_A \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \oint_{\partial A} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} \left( = \oint_{\partial A} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \right)$$

onde $\partial A$ é percorrido de forma a que $A$ esteja sempre à esquerda.

(iv) *Teorema de Stokes:* Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma variedade-2 com normal unitária $\vec{\mathbf{n}}$ e bordo $C$, e $\vec{\mathbf{F}}\colon S \to \mathbb{R}^3$ um campo vectorial de classe $C^1$. Então

$$\iint_S \operatorname{rot}\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS = \oint_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

onde $C$ é percorrido no sentido dado pela regra da mão direita.

37. *Lema da localização.* Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então

$$f(\mathbf{a}) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{V_n(B_\epsilon(\mathbf{a}))} \int_{B_\epsilon(\mathbf{a})} f$$

38. *Interpretação geométrica da divergência.* Se $\vec{\mathbf{F}}\colon U \to \mathbb{R}^n$ é um campo vectorial de classe $C^1$

$$\operatorname{div}\vec{\mathbf{F}}(\mathbf{a}) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{V_n(B_\epsilon(\mathbf{a}))} \int_{\partial B_\epsilon(\mathbf{a})} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} dV_{n-1}$$

onde $\vec{\mathbf{n}}$ designa a normal exterior à bola.

39. *Interpretação geométrica do rotacional.* Se $\vec{\mathbf{F}}\colon U \to \mathbb{R}^3$ é um campo vectorial de classe $C^1$. Se $\vec{\mathbf{n}}$ é um vector unitário,

$$\operatorname{rot}\vec{\mathbf{F}}(\mathbf{a}) \cdot \vec{\mathbf{n}} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi\epsilon^2} \oint_{C_\epsilon} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

onde $C_\epsilon$ é a uma circunferência de raio $\epsilon$ centrada em $\mathbf{a}$, no plano perpendicular a $\vec{\mathbf{n}}$ e percorrida no sentido dado pela regra da mão direita. Em particular, $\operatorname{rot}\vec{\mathbf{F}}(\mathbf{a})$ aponta na direcção perpendicular ao plano em que a circulação de $\vec{\mathbf{F}}$ é máxima.

40. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $\omega \in \Omega^1(U)$ uma forma-1 contínua. Então $\omega$ é exacta sse uma das seguintes condições equivalentes se verifica.

    (i) O integral de linha de $\omega$ depende apenas dos extremos de integração.

    (ii) $\oint_C \omega = 0$ para cada variedade-1 fechada contida em $U$.

    Equivalentemente, um campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}\colon U \to \mathbb{R}^n$ é um campo gradiente (ou conservativo) sse o integral de linha depende apenas dos extremos do caminho de integração, sse o integral de $\vec{\mathbf{F}}$ ao longo de qualquer curva fechada se anula.

41. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Dois caminhos $\gamma_0, \gamma_1 \colon [a,b] \to U$ com $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ e $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ dizem-se *homotópicos* se existe uma aplicação contínua (dita uma *homotopia* entre $\gamma_0$ e $\gamma_1$)
$$H \colon [a,b] \times [0,1] \to U$$
satisfazendo
$$H(t,0) = \gamma_0(t), \quad H(t,1) = \gamma_1(t), \quad H(a,s) = \gamma_0(a) = \gamma_1(a), \quad H(b,s) = \gamma_0(b) = \gamma_1(b).$$
42. Se $\omega \in \Omega^1(U)$ é uma forma-1 fechada, e $\gamma_0$,$\gamma_1$ são parametrizações de variedades-1 que são homotópicas por uma homotopia de classe $C^1$, então
$$\int_{\gamma_0(]a,b[)} \omega = \int_{\gamma_1(]a,b[)} \omega.$$
43. Um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ diz-se *simplesmente conexo* se é conexo e uma das seguintes condições equivalentes se verifica:
    (i) Todo o caminho fechado em $U$ é homotópico a um caminho constante.
    (ii) Dois caminhos em $U$ com o mesmo ponto inicial e final são homotópicos.
44. Se $U$ é simplesmente conexo, uma forma-1 $\omega \in \Omega^1(U)$ é fechada sse é exacta.
45. **Teorema** (de Rham): Se $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto. Uma forma $\omega \in \Omega^m(U)$ é exacta sse $\int_M \omega = 0$ para toda a variedade-$m$ compacta sem bordo $M \subset U$.
46. Se $U \subset \mathbb{R}^n$ é tal que toda a variedade-$m$ compacta sem bordo $M \subset U$ é o bordo de uma variedade-$(m+1)$ $W \subset U$, então uma forma $\omega \in \Omega^m(U)$ é fechada sse é exacta.

## 7. Integral de Lebesgue

1. Uma família $\mathcal{U}$ de subconjuntos de $X$ diz-se uma *álgebra de conjuntos* se
    (i) $\emptyset, X \in \mathcal{U}$,
    (ii) $A, B \in \mathcal{U} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{U}$,
    (iii) $A, B \in \mathcal{U} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{U}$,

    $\mathcal{U}$ diz-se uma *$\sigma$-álgebra* se além disso,
    (iv) $A_n \in \mathcal{U} \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{U}$.
2. Seja $\mathcal{U}$ uma álgebra de conjuntos. Uma função $\phi \colon \mathcal{U} \to [0, +\infty]$ diz-se *aditiva* se é não constante e para $A, B \in \mathcal{U}$ com $A \cap B = \emptyset$ se tem
$$\phi(A \cup B) = \phi(A) + \phi(B).$$
$\phi$ diz-se *$\sigma$-aditiva* se para $A_n \in \mathcal{U}$ com $A_i \cap A_j = \emptyset$ e $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{U}$ se tem necessariamente
$$\phi(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi(A_i).$$
3. *Propriedades das funções aditivas.*
    (i) $\phi(\emptyset) = 0$,
    (ii) $\phi(B) \leq \phi(A)$ se $B \subset A$,

(iii) $\phi(A \setminus B) = \phi(A) - \phi(B)$,

(iv) $\phi(A \cup B) = \phi(A) + \phi(B) - \phi(A \cap B)$,

(v) $\phi(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \phi(A_1) + \ldots + \phi(A_n)$ se $A_i \cap A_j = \emptyset$.

4. Se $\mathcal{U}$ é uma $\sigma$-álgebra, $A_n \in \mathcal{U}$, com $A_n \subset A_{n+1}$, e $\phi\colon \mathcal{U} \to [0, +\infty]$ é uma função aditiva então

$$\phi(\cup_i A_i) = \lim \phi(A_i).$$

5. A *medida exterior de Lebesgue* de $A \subset \mathbb{R}^n$ é

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} V_n(I_k)\colon I_k \text{ intervalo aberto },\ A \subset \cup_{k=1}^{\infty} I_k\}.$$

6. *Propriedades da medida exterior.*

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) $\mu^*(B) \leq \mu^*(A)$ se $B \subset A$,

(iii) $\mu^*(I) = V_n(I)$ se $I$ é um intervalo,

(iv) $\mu^*(\mathbf{x} + A) = \mu^*(A)$ para todo o $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

(v) $\mu^*(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$.

7. A *diferença simétrica* entre dois conjuntos $A, B$ é

$$A \ \Delta\ B = A \setminus B \cup B \setminus A.$$

8. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ diz-se *mensurável à Lebesgue* se para todo o $\epsilon > 0$ existe uma família contável $\{I_k\}$ de intervalos abertos tal que

$$\mu^*(A \ \Delta\ \cup_{k=1}^{\infty} I_k) < \epsilon.$$

9. A família $\mathcal{M}$ dos conjuntos mensuráveis à Lebesgue formam uma $\sigma$-álgebra e a restrição da medida exterior de Lebesgue a $\mathcal{M}$ é uma função $\sigma$-aditiva chamada a *medida de Lebesgue* e denotada $\mu$.

10. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto Lebesgue mensurável. Uma função $f\colon A \to \mathbb{R}$ diz-se *mensurável* se para todo o $c \in \mathbb{R}$, se tem

$$f^{-1}(]-\infty, c[) \in \mathcal{M}.$$

11. As seguintes afirmações são equivalentes

(i) Para todo o $c \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, c[) \in \mathcal{M}$,

(ii) Para todo o $c \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, c]) \in \mathcal{M}$,

(iii) Para todo o $c \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]c, +\infty[) \in \mathcal{M}$,

(iv) Para todo o $c \in \mathbb{R}$, $f^{-1}([c, +\infty[) \in \mathcal{M}$.

12. *Propriedades das funções mensuráveis.*

(i) Uma função contínua é mensurável,

(ii) Se $f$ é mensurável e $c \in \mathbb{R}$, $cf$ é mensurável,

(iii) Se $f$ é mensurável, $|f|$ é mensurável,

(iv) Se $f_n$ são mensuráveis, então $\inf f_n$, $\sup f_n$, $\liminf f_n$ e $\limsup f_n$ são mensuráveis.

(v) Se $f, g$ são mensuráveis, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ e em particular $f^+$ e $f^-$ são mensuráveis.

(vi) Se $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua e $f, g$ são mensuráveis, então $F(f, g)$ é mensurável. Em particular $f + g$, $f - g$ e $fg$ são mensuráveis.

13. Uma *função simples* $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função que toma apenas um número finito de valores $\{c_1, \ldots, c_n\}$. Escrevendo $A_i = s^{-1}(c_i)$ temos $s = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}$. Uma função simples é mensurável sse cada $A_i$ é mensurável.

14. Se $s$ é uma função simples mensurável e $A \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável, define-se

$$\int_A s = \sum_{i=1}^{n} c_i \ \mu(A \cap A_i)$$

desde que esta soma não contenha infinitos de sinais contrários.

15. Dada $f : A \to \mathbb{R}$, existe uma sucessão $s_k$ de funções simples tais que $s_k(x) \to f(x)$ para todo o $x \in A$. Se $f$ é mensurável podemos escolher $s_k$ mensuráveis e se $f \geq 0$ podemos escolher $s_k$ tais que $s_k(x)$ seja uma sucessão crescente para todo o $x \in A$.

16. Se $f : A \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável não negativa define-se o *integral de Lebesgue* de $f$ por

$$\int_A f = \sup\{\int_A s\colon s(x) \leq f(x), s \text{ simples e mensurável}\} \in [0, +\infty]$$

Se $f : A \to \mathbb{R}$ é mensurável define-se o integral de Lebesgue pela expressão

$$\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^- \in [-\infty, +\infty]$$

desde que um dos termos do lado direito seja finito. Se o integral é finito, $f$ diz-se *integrável*. O conjunto das funções integráveis em $A$ designa-se por $\mathcal{L}(A)$.

17. *Critério da comparação.* Se $f : A \to \mathbb{R}$ é mensurável, $|f| \leq g$ e $g \in \mathcal{L}(A)$, então $f \in \mathcal{L}(A)$.

18. Propriedades do integral:

(i) $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_A f \leq \int_A g$,

(ii) $f \in \mathcal{L}(A)$ sse $|f| \in (A)$ e nesse caso, $\left|\int_A f\right| \leq \int_A |f|$,

(iii) Se $f$ é mensurável e limitada e $\mu(A) < \infty$ então $f$ é integrável,

(iv) Se $\mu(A) = 0$ então $\int_A f = 0$ para toda a função $f$,

(v) Se $B \subset A$ são mensuráveis e $f \in \mathcal{L}(A)$ então $f \in \mathcal{L}(B)$

(vi) *$\sigma$-aditividade do integral:* Se $f \geq 0$ é mensurável e $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ com $A_i$ mensuráveis e disjuntos dois a dois, temos

$$\int_A f = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f.$$

(vii) Se $B \subset A$ são mensuráveis e $A \setminus B$ tem medida nula então $\int_A f = \int_B f$ para qualquer $f \in \mathcal{L}(A)$.

19. *Teorema da Convergência Monótona:* Seja $A$ um conjunto mensurável, e $f_n\colon A \to \mathbb{R}_0^+$ uma sucessão de funções mensuráveis tais que

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall n,\ \forall x \in A,$$

e seja

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Então

$$\int_A f = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n.$$

20. *Teorema da Convergência Dominada:* Seja $A$ um conjunto mensurável, e $f_n\colon A \to \mathbb{R}$ uma sucessão de funções mensuráveis. Suponhamos que
    (i) Existe $g \in \mathcal{L}(A)$ tal que

    $$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall n,\ \forall x \in A,$$

    (ii) O limite

    $$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

    existe para quase todo o $x \in A$.

    Então $f \in \mathcal{L}(A)$, e

    $$\int_A f = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n.$$

21. $\frac{1}{x^\alpha} \in \mathcal{L}([1,+\infty[) \Leftrightarrow \alpha > 1$ e $\frac{1}{x^\alpha} \in \mathcal{L}(]0,1]) \Leftrightarrow \alpha < 1$.
22. *Regra de Leibniz:* Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ mensurável, $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : A \times U \to \mathbb{R}$ mensurável tal que $f(\mathbf{x}, y)$ é integrável para cada $y \in U$. Se existe $g \in \mathcal{L}(A)$ tal que

    $$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, y)\right| \leq g(\mathbf{x})$$

    para $\mathbf{x} \in A$ e $y$ numa vizinhança de $y_0$, então a função $F\colon U \to \mathbb{R}$ definida por

    $$F(y) = \int_A f(\mathbf{x}, y)$$

    é diferenciável em $y_0$ e

    $$F'(y_0) = \int_A \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, y_0).$$

23. Se $f$ é integrável à Riemann (no sentido generalizado) então $f$ é integrável à Lebesgue e os integrais coincidem.