Análise Matemática III - Turma Especial

Ficha 9

A entregar até à aula de 25 de Novembro

1. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Um subconjunto $A \subset X$ diz-se um *aberto de* X ou um *aberto relativo de* X se $A = U \cap X$ para algum aberto U de $\mathbb{R}^n$, e analogamente se define fechado de A.

   (a) Mostre que um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é conexo sse os únicos subconjuntos de A que são simultaneamente abertos e fechados de A são $\emptyset$ e A.

   (b) Mostre que uma variedade conexa orientável possui exactamente duas orientações.

   (c) Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ diz-se *localmente conexo por arcos* se para todo o $x \in X$ existe um aberto U de X tal que $x \in U$ e U é conexo por arcos. Mostre que se X é conexo e localmente conexo por arcos, então X é conexo por arcos. Conclua que uma variedade conexa é conexa por arcos.

2. Calcule $\int_{M^\mu} \omega$ onde

   (a) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } x = z\}$, μ é a orientação determinada por dz no ponto $(0, 1, 0)$ e $\omega = ydx + xdy + zdz$,

   (b) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 + z^2 = x^2 + y^2, |z| < 1\}$ com a orientação determinada pelo vector normal unitário que aponta no sentido oposto ao eixo dos zz e $\omega = zdx \wedge dy$.

   (c) $M = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \colon x^2 + y^2 = 1,\ z^2 + w^2 = 1\}$, μ é a orientação determinada por $\mu = dy \wedge dw$ no ponto $(1, 0, 1, 0)$, e $\omega = ywdx\wedge dz + xzdy \wedge dw - yzdx \wedge dw - xwdy \wedge dz$.

3. Seja $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e $\mathbf{g} \colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 tal que $\mathbf{g}_{|]a,b[}$ é uma parametrização de uma variedade-1. Use o teorema fundamental do cálculo para funções de uma variável para mostrar que

$$\int_{\mathbf{g}(]a,b[)^+} df = f(\mathbf{g}(b)) - f(\mathbf{g}(a))$$

   onde $+$ designa a orientação induzida pela parametrização $\mathbf{g}$. Use este facto para concluir que a forma fechada

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$$

   não é exacta.

   Não precisam de entregar:

4. A *garrafa de Klein* K é a imagem da aplicação $\mathbf{g} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definida

$$\mathbf{g}(\theta, \phi) = \big((R + r \cos\phi) \cos\theta, (R + r \cos\phi) \operatorname{sen}\theta, r \operatorname{sen}\phi \cos\tfrac{\theta}{2}, r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\tfrac{\theta}{2}\big)$$

   onde $0 < r < R$. Mostre que K é uma variedade-2 não orientável.