# Análise Matemática III - Turma Especial

## Ficha 8

*A entregar até à aula de 18 de Novembro*

1. Considere as seguintes formas diferenciais:

$$\begin{aligned}
\alpha &= x^3 dx + y^2 dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2), \\
\beta &= -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus 0), \\
\omega &= e^{xz} dx + x \cos z dy + y^2 dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3), \\
\eta &= x dx \wedge dy - z dx \wedge dz + xyz dy \wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^3),
\end{aligned}$$

   e as funções

   $\mathbf{f} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\mathbf{f}(t) = (t, t^2)$;
   $\mathbf{g} \colon ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \to \mathbb{R}^2$ definida por $\mathbf{g}(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$;
   $\mathbf{h} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{h}(u, v, w) = (uv, vw, uw)$.

   Calcule

   (a) $\alpha \wedge \beta, \omega \wedge \eta, \eta \wedge \eta$.
   (b) $d\alpha, d\beta, d\omega, d\eta$.
   (c) $\mathbf{f}^*\alpha, \mathbf{g}^*\alpha, \mathbf{g}^*\beta, \mathbf{h}^*\eta$.

2. Decida se as seguintes formas diferenciais definidas em $\mathbb{R}^3$ são ou não exactas. Em caso afirmativo, calcule um potencial.

   (a) $yz dx + xz dy + xy dz$;
   (b) $z dx \wedge dy - y dx \wedge dz + x dy \wedge dz$;
   (c) $2 dx \wedge dy + yz dx \wedge dz + xz dy \wedge dz$;
   (d) $x^2 y e^z dx \wedge dy \wedge dz$.

3. Uma aplicação $\mathbf{f} \colon U \to V$ entre abertos de $\mathbb{R}^n$ diz-se um *difeomorfismo* se $\mathbf{f}$ é uma bijecção de classe $C^1$ com inversa de classe $C^1$. Mostre que se $U$ é um conjunto em estrela e $V$ é difeomorfo a $U$ então toda a forma fechada em $V$ é exacta.

   **Não precisam de entregar:**

4. Considere $\mathbb{R}^{2n}$ com as funções coordenadas $(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$, e a forma-2

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i$$

   (dita a *forma simpléctica canónica*).

(a) Mostre que $\omega$ é exacta e indique um potencial.

(b) Seja $\mathbf{X} = (\xi^1, \ldots, \xi^n, \eta_1, \ldots, \eta_n) : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ um campo vectorial. A *contracção* de $\mathbf{X}$ com $\omega$ é a forma-1 $\mathbf{X} \rfloor \omega$ definida por

$$\mathbf{X} \rfloor \omega(\mathbf{Y}) = \omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$$

para todo o $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$. Mostre que

$$\mathbf{X} \rfloor \omega = \sum_{i=1}^{n} \left( \eta_i dq^i - \xi^i dp_i \right).$$

(c) O *campo Hamiltoniano* gerado pela função $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ é o campo vectorial $\mathbf{X}_H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ tal que

$$\mathbf{X}_H \rfloor \omega = -dH.$$

Mostre que

$$\mathbf{X}_H = \left( \frac{\partial H}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q^1}, \ldots, -\frac{\partial H}{\partial q^n} \right).$$

(d) O campo vectorial $\mathbf{X}_H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ determina o sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{X}_H(\mathbf{x}(t)).$$

Mostre que

$$\frac{d}{dt} H(\mathbf{x}(t)) = \left( \mathbf{X}_H \rfloor dH \right)(\mathbf{x}(t))$$

e aproveite para mostar que $H$ é constante ao longo das soluções destas equações, i.e.,

$$\frac{d}{dt} H(\mathbf{x}(t)) = 0.$$

(e) Mostre que o sistema de equações determinado por $\mathbf{X}_H$ é

$$\begin{cases} \dot{q}^i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

(*equações de Hamilton*). Escreva as equações de Hamilton para a função $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ dada por

$$H(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (p_i)^2 + U(q^1, \ldots, q^n).$$