Análise Matemática III - Turma Especial

Ficha 7

A entregar até à aula de 11 de Novembro

1. Considere os covectores

$$\begin{aligned}
\alpha &= 2\mathbf{e}^1 + 3\mathbf{e}^2 + \mathbf{e}^4 \in \Lambda^1(\mathbb{R}^4) \\
\beta &= 2\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^3 - \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^4 \in \Lambda^2(\mathbb{R}^4) \\
\eta &= \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 + \ldots + \mathbf{e}^{2n-1} \wedge \mathbf{e}^{2n} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{2n})
\end{aligned}$$

e as transformações lineares $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{g}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ representadas nas bases canónicas pelas matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Represente nas bases canónicas os seguintes covectores:

(a) $\alpha \wedge \alpha + 2\beta$, $\alpha \wedge \beta$, $\beta \wedge \beta$, $\alpha \wedge \beta \wedge \beta$,

(b) $\eta \wedge \ldots \wedge \eta$ (produto com n factores),

(c) $\mathbf{f}^*(\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2)$ e $\mathbf{g}^*(\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2)$.

Calcule ainda

$$\beta((0, 1, -1, 0), (1, 2, 1, -1)),$$

e

$$(\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3)((1, 0, 4), (0, 2, 1), (-1, 0, 1)).$$

2. Dado um vector

$$\mathbf{v} = v^1\mathbf{e}_1 + \ldots + v^n\mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$$

definimos o covector-1

$$\omega_{\mathbf{v}} = v^1\mathbf{e}^1 + \ldots + v^n\mathbf{e}^n \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$$

e o covector-$(n-1)$

$$\Omega_{\mathbf{v}} = v^1\mathbf{e}^2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}^n - \ldots + (-1)^{n-1}\mathbf{e}^1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}^{n-1} \in \Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n).$$

Mostre que

(a) $\omega_{\mathbf{v}} \wedge \Omega_{\mathbf{w}} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{e}^1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}^n$.

(b) Se $n = 3$,

$$\omega_{\mathbf{v}} \wedge \omega_{\mathbf{w}} = \Omega_{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}.$$

(c) Definimos o volume k-dimensional de um paralelipípedo gerado pelos vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ como o volume n-dimensional do paralelipípedo gerado por $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_{k+1}, \ldots, \mathbf{w}_n$ onde os $\mathbf{w}_i$ são ortonormais e perpendiculares a todos os $\mathbf{v}_j$.

Mostre que o volume-k de um paralelipípedo é dado por $\sqrt{\det(g_{ij})}$ onde (g_{ij}) é a matriz $k \times k$ dada por $g_{ij} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$.

Em particular, os vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ são linearmente dependentes sse $\det(g_{ij}) = 0$.

Sugestão: Comece por considerar o caso $k = n$. Note que $(g_{ij}) = V^t V$ onde V é a matriz $n \times k$ que tem os vectores $\mathbf{v}_i$ por colunas, logo esta matriz é invariante se aplicarmos uma transformação ortogonal às arestas do paralelipípedo.

(d) $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ são linearmente dependentes sse

$$\omega_{\mathbf{v}_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{\mathbf{v}_k} = 0.$$

Além disso $\omega_{\mathbf{v}_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{\mathbf{v}_n} = c \det$ onde c é o determinante da matriz $n \times n$ que tem os vectores $\mathbf{v}_i$ por colunas.

Sugestão: Calcule $(\omega_{\mathbf{v}_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{\mathbf{v}_k})(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$.

(e) O *produto externo* em $\mathbb{R}^n$ é a operação $(n-1)$-ária que associa a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ o vector $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 \times \ldots \times \mathbf{v}_{n-1}$ definido por

$$\Omega_{\mathbf{w}} = \omega_{\mathbf{v}_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{\mathbf{v}_{n-1}}.$$

Mostre que $\mathbf{v}_1 \times \ldots \times \mathbf{v}_{n-1}$ é ortogonal a cada um dos seus factores e que o seu comprimento é o volume $(n-1)$-dimensional do paralelogramo com arestas $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$.

(f) se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ são linearmente independentes então a base

$$\{\mathbf{v}_1 \times \ldots \times \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}\}$$

tem a mesma orientação que a base canónica de $\mathbb{R}^n$. [1]

(g) o produto externo é dado pela fórmula

$$\mathbf{v}_1 \times \ldots \times \mathbf{v}_{n-1} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \ldots & \mathbf{e}_n \\ v_1^1 & \ldots & v_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{n-1}^1 & \vdots & v_{n-1}^n \end{vmatrix}$$

3. Seja $\mathbf{c}\colon [0,1] \to (\mathbb{R}^n)^n$ uma função contínua tal que $\{\mathbf{c}_1(t), \ldots, \mathbf{c}_n(t)\}$ forma uma base de $\mathbb{R}^n$ para todo o $t \in [0,1]$. Mostre que todas estas bases têm a mesma orientação.

   Sugestão: O que pode dizer de $\det(\mathbf{c}(t))$?

   Não precisam de entregar:

4. Mostre que uma base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ tem a mesma orientação que a base canónica sse $\mathbf{v}_2$ é um múltiplo positivo de um vector que se obtém de $\mathbf{v}_1$ rodando um ângulo $0 < \theta < \pi$ no sentido directo.

[1] Em $\mathbb{R}^3$ isto é a regra da mão direita para determinar se uma base tem a mesma orientação que a base canónica.

5. Considere uma transformação linear invertível $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (que podemos interpretar como uma mudança de coordenadas linear) definida por

$$\overline{\mathbf{e}_i} = T(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^{n} a_i^j \mathbf{e}_j.$$

   (a) Mostre que se $\sum_{i=1}^{n} x^i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}^i \overline{\mathbf{e}}_i$ então

$$\overline{x}^i = \sum_{j=1}^{n} b_j^i x^j,$$

   com b a matriz inversa de a, isto é $\sum_{l=1}^{n} b_k^l a_l^m = \delta_k^m$ para todos os k, m.

   (b) Mostre que se $\{\overline{\mathbf{e}}^i\}$ é a base dual de $\{\overline{\mathbf{e}}_i\}$ então

$$\overline{\mathbf{e}}^i = \sum_{j=1}^{n} b_j^i \overline{\mathbf{e}}^j$$

   Os covectores-1 transformam-se portanto como as coordenadas, razão por que se chamam tensores *c*ovariantes. Os vectores transformam-se de forma "oposta"pelo que se dizem *contravariantes*.