Análise Matemática III - Turma Especial

Ficha 4

A entregar até à aula de 21 de Outubro

1. Escreva expressões para os volumes dos seguintes conjuntos em termos de integrais iterados:

   (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \text{ e } x^2 + y^2 \geq 1\}$,

   (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + z^2 \leq 1 \text{ e } y^2 + z^2 \leq 1\}$,

   (c) $\{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \colon |x^1| + \ldots + |x^n| \leq 1\}$.

2. Inverta a ordem de integração do seguinte integral

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \int_{0}^{x^2+y^2+z^2} f(x, y, z, w) dw dz dy dx.$$

3. Mostre que se A é um conjunto mensurável à Jordan então para todo o $\epsilon > 0$ existe um conjunto compacto $C \subset A$ tal que C é mensurável à Jordan e

$$\int_{A \setminus C} 1 < \epsilon.$$

   Sugestão: Comece por mostrar que se I é um intervalo compacto e $A \subset I$ é um conjunto Jordan mensurável, existe uma partição de I em subintervalos fechados tal que

$$\sum_{S \in \mathcal{S}_1} v(S) - \sum_{S \in \mathcal{S}_2} v(S) < \epsilon$$

   onde $\mathcal{S}_1$ designa o conjunto dos subintervalos da partição que intersecta C e $\mathcal{S}_2$ designa o conjunto dos subintervalos da partição contidos em C.

4. Use o teorema de Fubini para demonstrar o *Lema de Schwarz*: Se $f \colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é de classe C^2, com U aberto então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{a})$$

   Sugestão: Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{a}) > 0$ há um rectângulo em torno de $\mathbf{a}$ em que a diferença entre as derivadas parciais é positiva.

   Não precisam de entregar:

5. Mostre que se A é Jordan mensurável o mesmo sucede a $\operatorname{int} A$ e $\overline{A}$ e os volumes de todos estes conjuntos coincidem.

6. Mostre que se A é Jordan mensurável e tem medida nula então $V_n(A) = 0$.

7. Seja $\{q_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ uma enumeração dos racionais de $]0,1[$ e para cada n sejam $a_n, b_n \in [0,1]$ tais que $a_n < q_n < b_n$. Seja
$$A = \cup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n[.$$
Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) < 1$, então a fronteira de A é o conjunto $[0,1] \setminus A$. Conclua que nesse caso, A é um conjunto aberto não mensurável à Jordan.

8. Seja $C \subset I \times J$ um conjunto de conteúdo nulo. Para cada $x \in I$ seja
$$C_x = \{y \in J \colon (x,y) \in C\} \subset J.$$
Mostre que
$$N = \{x \in I \colon C_x \text{ não tem conteúdo nulo.}\}$$
tem medida nula.

9. Mostre que existe um conjunto $A \subset [0,1] \times [0,1]$ tal que A contém no máximo um ponto em cada "linha" $[0,1] \times \{y\}$ e cada coluna $\{x\} \times [0,1]$ e tal que $\mathrm{front}\, A = [0,1] \times [0,1]$.

   Conclua que
$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \chi_A(x,y) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 \chi_A(x,y) dx \right) dy = 0$$
   mas χ_A não é integrável à Riemann.

   *S*ugestão: Basta garantir que A contém um ponto em cada quarto do quadrado $[0,1] \times [0,1]$, e em cada dezasseis avos, etc...