Análise Matemática III - Turma Especial

Ficha 4

A entregar até à aula de 14 de Outubro

1. Seja I um intervalo limitado, e $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ funções integráveis à Riemann. Mostre as seguintes afirmações.
   (a) $f + g$ é integrável e $\int_I f + g = \int_I f + \int_i g$.
   (b) $|f|$ é integrável e $\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$.
   Sugestão: Para mostrar que $|f|$ é integrável considere as funções $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ e $f^-(x) = \min\{f(x), 0\}$.
2. Mostre que se $A \subset \mathbb{R}^n$, toda a cobertura aberta de A tem uma subcobertura contável.
3. Indique justificando quais dos seguintes conjuntos tem conteúdo nulo e quais têm medida nula.
   (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \frac{1}{n}$ para algum $n\}$,
   (b) $\mathbb{Q} \cap [0, 1] \subset \mathbb{R}$,
   (c) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4\colon : x^2 + y^2 < 1$ e $z^2 + w^2 < 1\}$,
   (d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |xyz| = 1\}$.
4. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Mostre que uma função monótona $f : I \to \mathbb{R}$ é contínua quase em toda a parte.
   Sugestão: O que pode dizer sobre o conjunto $\{x \in I\colon o(f, x) > \frac{1}{n}\}$?
   Não precisam de entregar:
5. Recorde que um subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto sse toda a cobertura aberta de K tem uma subcobertura finita.
   (a) Mostre que se $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua, e $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto então $f(K)$ é compacto.
   (b) Use a alínea (a) para mostrar o Teorema de Weierstrass: Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é contínua e $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, então f tem máximo e mínimo em K.
   (c) Mostre o Teorema de Heine-Cantor: Se $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua e $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, $\mathbf{f}$ é uniformemente contínua em K.
   Sugestão: Comece por mostrar que se $\{U_1, \ldots, U_n\}$ é uma cobertura aberta de K existe $\delta > 0$ tal que para todo o $x \in K$, existe i tal que $B_\delta(x) \subset U_i$.
6. Seja I um intervalo limitado, e $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ funções integráveis à Riemann. Mostre as seguintes afirmações.
   (a) Se $f(x) \leq g(x)$ então $\int_I f \leq \int_I g$.
   (b) Se $\alpha \in \mathbb{R}$, αf é integrável e $\int_I (\alpha f) = \alpha \int_I f$.

7. Recorde que o conjunto de Cantor é o subconjunto de $[0,1]$

$$C = \cap_{n=1}^{\infty} J_n$$

em que $J_1 = [0,1]$ e J_{n+1} se obtém de J_n retirando o interior do "terço do meio" de cada intervalo de J_n. Por exemplo,

$$J_2 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

$$J_3 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Para cada um dos conjuntos J_n seja $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ a função contínua que é constante em $[0,1] \setminus J_n$ e afim com declive $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ em cada intervalo de J_n.

Note que $f_n(0) = 0$ e $f_n(1) = 1$. Mostre que a sucessão de funções $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para uma função contínua $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ (chamada a *escada do Diabo*), crescente, com $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$, diferenciável com derivada nula em todos os pontos do aberto $[0,1] \setminus C$. Mostre ainda que f aplica C sobrejectivamente em $[0,1]$.