Análise Matemática III - Turma Especial

Ficha 2

A entregar até à aula de 30 de Setembro

1. Determine e classifique os pontos de estacionariedade das seguintes funções
   (a) $f(x,y) = xye^{x-y}$.
   (b) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$.

2. Considere a função $\mathbf{f}\colon D \to \mathbb{R}^2$, onde $D = \{(x,y)\colon x > 0, y > 0\}$, definida pela expressão

$$\mathbf{f}(x,y) = (\log(xy), \frac{1}{x^2+y^2}).$$

   Calcule o Jacobiano $J\mathbf{f}(x,y)$. Determine a imagem $\mathbf{f}(D)$. Ache um conjunto maximal S tal que $\mathbf{f}_{|S}$ é injectiva e dê uma expressão para a inversa $\mathbf{f}^{-1}\colon \mathbf{f}(S) \to S$.

3. Considere a função $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 + xy > 0\}$) dada por

$$\mathbf{f}(x,y) = (x - y + \log(1+xy), 1 + x + y - x^2y^2).$$

   (a) Mostre que $\mathbf{f}$ tem uma inversa local de classe C^∞ numa vizinhança de $(0,0)$. Designando essa inversa por $\mathbf{g}$, calcule $D\mathbf{g}(0,1)$.
   (b) Mostre que o subconjunto de $\mathbb{R}^4$ definido por $(zw, z+w) = \mathbf{f}(x,y)$ é dado pelo gráfico de uma função $(x,y) = \mathbf{h}(z,w)$ de classe C^∞ numa vizinhança do ponto $(0,0,0,1)$. Calcule $D\mathbf{h}(0,1)$.

4. Demonstre o Teorema da Função Inversa a partir do Teorema da Função Implícita.

5. Seja $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por

$$\mathbf{f}(x,y,z,w) = (x^2 + y^2 - w^2, e^y + 2xz)$$

   (a) Determine o conjunto dos pontos em torno dos quais o sistema $\mathbf{f}(x,y,z,w) = (-1,1)$ determina (y,w) como função de classe C^∞ de (x,z).
   (b) Sendo $\mathbf{g}(x,z)$ a função definida implicitamente pelo sistema em torno do ponto $(0,0,0,1)$. Calcule $\frac{\partial g^2}{\partial x}(0,0)$.

   Não precisam de entregar:

6. Use a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

   para mostrar que a hipótese de f ser C^1 não pode ser omitida nas hipóteses do Teorema da Função Inversa.

7. Seja D um conjunto aberto, $\mathbf{x}_0 \in D$ e $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável em $\mathbf{x}_0$.

   (a) Mostre que se $\mathbf{f}$ possui inversa local numa vizinhança de $\mathbf{x}_0$ diferenciável em $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ então $m = n$.

   (b) Mostre que se $m \geq n$, $\mathbf{f}$ é de classe C^1 e $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ possui característica máxima então existe um aberto $U \subset D$ contendo $\mathbf{x}_0$ no qual $\mathbf{f}$ é injectiva.

   (c) Mostre que se $m \leq n$, $\mathbf{f}$ é de classe C^1 e $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ possui característica máxima então existe um aberto $U \subset D$ contendo $\mathbf{x}_0$ cuja imagem por $\mathbf{f}$ é aberta.

8. Seja X um espaço vectorial normado.

   (a) Dê um exemplo de um espaço normado que não seja completo.

   (b) Mostre que se $\mathbf{f} : D \subset X \to D$ é uma contracção então $\mathbf{f}$ é contínua e que se $\mathbf{f}$ tem um ponto fixo, ele é único.

   (c) Mostre que se X é completo qualquer contracção $\mathbf{f} : D \to D$ com $D \subset X$ fechado, tem um e um só ponto fixo. *Sugestão: Considere a sucessão $\mathbf{f}^n(\mathbf{x})$ para $\mathbf{x}$ um ponto qualquer em D.*

   (d) Seja X o espaço vectorial das funções contínuas no intervalo $[0, \alpha]$ com a norma

   $$\|x\|_\infty = \sup_{t \in [0,\alpha]} |x(t)|.$$

   É possível mostrar que X é completo. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função *Lipschitziana*, i.e., para a qual existe $M > 0$ tal que

   $$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

   Definimos a aplicação $F : X \to X$ mediante

   $$F(x)(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))ds$$

   com $x_0 \in \mathbb{R}$. Mostre F é uma contracção para $\alpha > 0$ suficientemente pequeno.

   (e) Use a alínea anterior para mostrar que se f é Lipschitziana o *problema de Cauchy*

   $$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

   possui solução única de classe C^1 num intervalo $[0, \alpha]$ para $\alpha > 0$ suficientemente pequeno.