Análise Matemática III - Turma Especial

Ficha 12

A entregar até 15 de Dezembro

1. Dê um exemplo de uma sucessão de funções $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que
$$f_n(x) \to 0 \text{ para todo o } x \in [0,1],$$
mas
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) = 1.$$
Explicite quais são as hipóteses dos teoremas de convergência que não são satisfeitas.

2. Decida se cada uma das seguintes funções é integrável no seu domínio, e em caso afirmativo calcule o integral:
$$\frac{1}{\cosh x}, \qquad \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \qquad \frac{e^{-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3. Calcule
   (a) $\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \frac{\sqrt[n]{x}}{1+x^2}$,
   (b) $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)^n}$,
   (c) $\lim_{t\to 0^+} \int_t^\infty e^{-tx^2} dx$.

4. *Regra de Leibniz:* Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ mensurável, $U \subset \mathbb{R}$ aberto e $f : A \times U \to \mathbb{R}$ mensurável tal que
   (i) $f(\mathbf{x}, y)$ é integrável em A para cada $y \in U$,
   (ii) $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, y)$ existe para todo o $x \in A$ e para todos os $y \in U$,
   (iii) existe $g \in \mathcal{L}(A)$ tal que
   $$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, y)\right| \leq g(\mathbf{x})$$
   para $\mathbf{x} \in A$ e y numa vizinhança de y_0.

   Use o Teorema da Convergência Dominada para mostrar que a função $F \colon U \to \mathbb{R}$ definida por
   $$F(y) = \int_A f(\mathbf{x}, y)$$
   é diferenciável em y_0 e
   $$F'(y_0) = \int_A \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, y_0).$$

Não precisam de entregar:

5. A *função Gama* é definida pela fórmula

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

(a) Mostre que esta função está bem definida para $x > 0$.

(b) Mostre que

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

e que

$$\Gamma(1) = 1.$$

Conclua que

$$\Gamma(n+1) = n!$$

pelo que a função Gama é uma "versão contínua"do factorial.

(c) Use o resultado da aula $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ para mostrar que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

(d) Mostre que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\mathbf{x}\|^2} dV_n = \pi^{\frac{n}{2}} = V_{n-1}(S^{n-1}) \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{n-1} dr,$$

onde

$$S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

Conclua que

$$V_{n-1}(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

(e) Use o Teorema da Divergência para mostrar que

$$V_n(B^n) = \frac{1}{n} V_{n-1}(S^{n-1}),$$

onde

$$B^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon \|\mathbf{x}\| < 1\}.$$

Conclua que

$$V_n(B^n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$

(f) Seja

$$f(t) = x \log t - t$$

o logaritmo da função integranda na expressão para $\Gamma(x+1)$. Mostre que para $x > 0$ esta função tem um máximo para $t = x$, e que a sua expansão em série de Taylor em torno deste ponto é

$$f(t) = x \log x - x - \frac{(t-x)^2}{2x} + \dots$$

Mostre que aproximando f pela sua expansão até à segunda ordem se obtém a fórmula aproximada

$$\Gamma(x+1) \simeq \left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-x}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2x}} du \simeq \left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2x}} du = \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

válida para $x >> 1$. Esta fórmula assintótica é a famosa *fórmula de Stirling* para o factorial

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \text{ para } n >> 1.$$