Análise Matemática III - Turma Especial

Ficha 11

A entregar até à aula de 9 de Dezembro

1. **Neste exercício não pode usar formas diferenciais.**

   (a) Calcule o fluxo de $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (xe^y, -2e^y, ze^y)$ através da superfície

   $$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon y = 3 - \sqrt{x^2+z^2}, 1 < y < 2\}$$

   no sentido da normal com segunda componente negativa

   (i) usando o Teorema de Stokes,

   (ii) usando o Teorema da Divergência.

   (b) Calcule o fluxo de $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (yz, 2xze^{z^2}, 2xye^{y^2})$ através da superfície

   $$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x = y^2 + z^2, x < 4\}$$

   no sentido da normal com primeira componente positiva.

   (c) Calcule o fluxo de $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (2yz - 2z, 2xz - 2z, 2)$ através da superfície

   $$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = \operatorname{sen}(x^2+y^2-\pi),\ \pi < x^2+y^2 < 2\pi\}$$

   no sentido da normal com terceira componente positiva.

2. Mostre que o Teorema da Divergência para variedades-2 em $\mathbb{R}^2$ é equivalente ao Teorema de Green.

3. Seja $A \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ um conjunto. Define-se o *ângulo sólido subtendido por A* por

   $$\Omega(A) = \{t\mathbf{x} \colon t \in \mathbb{R}^+,\ \mathbf{x} \in A\}.$$

   A medida do ângulo sólido $|\Omega(A)|$ é por definição a área de

   $$\Omega(A) \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 = 1\}.$$

   Seja S uma variedade-2 com a seguinte propriedade: qualquer semi-recta com extremo na origem intersecta S quando muito num ponto.

   (a) Mostre que

   $$|\Omega(S)| = \iint_S \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x,y,z) \cdot \vec{\mathbf{n}}\, dS$$

   (b) A forma-2 em $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ correspondente ao campo vectorial da alínea anterior chama-se o *elemento de ângulo sólido $d\Theta$*. Mostre que $d\Theta$ é uma forma fechada não exacta.

   (c) Mostre que não existe um difeomorfismo $\phi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

4. Considere a variedade-2

$$M = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \colon x^2 + y^2 = 1 \text{ e } z^2 + w^2 = 1\}$$

e a forma-2

$$\omega = (-ydx + xdy) \wedge (-wdz + zdw)$$

Use o teorema de Stokes para calcular

$$\int_{M^\mu} \omega$$

onde μ é a orientação induzida por ω.

Não precisam de entregar:

5. Mostre que se $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ é fechada, existe $a \in \mathbb{R}$ e $\varphi \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, tal que

$$\omega = \frac{ay}{x^2 + y^2} dx - \frac{ax}{x^2 + y^2} dy + d\varphi.$$

6. *Interpretação geométrica da derivada exterior.* Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $\mathbf{a} \in U$ e $\omega \in \Omega^m(U)$ uma forma-m de classe C^1. Seja $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{m+1}\}$ um conjunto de vectores linearmente independente e A a matriz $n \times (m+1)$ cujas colunas são formadas pelas componentes dos vectores.

   Mostre que

$$d\omega(\mathbf{a})(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{m+1}) = \sqrt{\det A^t A} \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{V_{m+1}(B_\epsilon(\mathbf{a}))} \int_{\partial B_\epsilon(\mathbf{a})^\mu} \omega$$

   onde $B_\epsilon(\mathbf{a})$ designa a bola de raio ϵ centrada em $\mathbf{a}$ no plano

$$\{\mathbf{a} + t^1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_{m+1} \colon t^i \in \mathbb{R}\}$$

   e μ é a orientação induzida em $\partial B_\epsilon(\mathbf{a})$ pela orientação do plano determinada pela base $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{m+1}\}$