Análise Matemática III - Turma Especial

Ficha 10

A entregar até à aula de 2 de Dezembro

1. Calcule a àrea, o centróide[1] e o momento de inércia em torno do eixo dos zz em função da massa total M das seguintes superfícies:

   (a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2=r^2$ e $z \in [0,h]\}$ com $r,h>0$,

   (b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = \frac{h}{r}(r-\sqrt{x^2+y^2})$ e $z \in [0,h]\}$ com $r,h>0$,

   (c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2=r^2\}$, com $r>0$.

   Calcule ainda o comprimento da curva determinada pela intersecção da superfície esférica definida pela equação $x^2+y^2+z^2=1$ com o plano $x-y+z=0$.

2. Prove o *segundo Teorema de Pappus*: Se $C \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x>0\}$ é uma variedade-1 de comprimento finito, a área da superfície de revolução S que se obtem rodando C em torno do eixo dos yy é
$$V_2(S) = 2\pi \overline{x} V_1(C)$$
   onde $\overline{x}$ designa o centróide de C. Aproveite para dar uma expressão para a área do toro.

3. Considere o campo vectorial
$$\mathbf{F}(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y)$$

   (a) Calcule o integral de linha de $\mathbf{F}$ ao longo da curva
$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x=\cos\theta,\ y=\operatorname{sen}\theta,\ z=2\theta, 0 \le \theta \le 2\pi\}$$
   no sentido descendente sem usar o Teorema de Stokes.

   (b) Use o Teorema de Stokes para variedades-1 para confirmar o cálculo da alínea anterior.

   (c) Calcule o fluxo de $\mathbf{F}$ através da superfície
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = x^2+y^2 \le 1\}$$
   no sentido da normal que aponta para cima, sem usar o Teorema de Stokes.

   (d) Repita o cálculo da alínea anterior usando o Teorema de Stokes para variedades-2.

   (e) Repita o cálculo da alínea anterior usando o Teorema de Stokes para variedades-3.

   Não precisam de entregar:

4. Considere a variedade-2
$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2=1.\}$$

[1] Pode usar argumentos de simetria.

(a) Mostre que a parametrização $\mathbf{g}\colon]0,2\pi[\times]-1,1[\to \mathbb{R}^3$ que usa as coordenadas cilíndricas satisfaz

$$\mathbf{g}^* dV_2 = d\theta \wedge dz.$$

Isto significa que a carta local associada a esta parametrização, chamada a *projecção cilíndrica* preserva áreas. Por esta razão ela é bastante utilizada em cartografia.

(b) A carta local mais utilizada em cartografia é a *projecção de Mercator*, que tem como parâmetros as funções (u,θ), onde (θ,ϕ) são as coordenadas esféricas usuais correspondentes à parametrização $\mathbf{h}\colon]0,2\pi[\times]0,\pi[\to \mathbb{R}^3$ definida pela expressão

$$\mathbf{h}(\theta,\phi) = (\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \cos\phi)$$

e

$$u(\phi) = \log|\operatorname{cosec}\phi + \operatorname{cotg}\phi| = \log\left|\operatorname{cotg}\tfrac{\phi}{2}\right|.$$

Mostre que nas coordenadas (θ,u) a matriz da métrica

$$\mathbf{g}_{ij} = (\partial_i\mathbf{g}\cdot\partial_j\mathbf{g})$$

é dada por

$$\begin{bmatrix} \operatorname{sen}^2\phi & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}^2\phi \end{bmatrix}.$$

Conclua que a projecção de Mercator preserva ângulos entre duas curvas (definidas como os ângulos entre os respectivos vectores tangentes).

(c) A projecção de Mercator associa aos meridianos curvas onde θ é constante e aos paralelos, curvas onde u é constante. Assim, uma linha recta na carta de Mercator corresponde a uma linha de rumo constante, dita uma *linha de rumo* ou *curva loxodrómica* (descoberta por Pedro Nunes). Obtenha a expressão destas curvas em coordenadas (θ,ϕ) e estude o seu comportamento na vizinhança dos pólos.