Análise Matemática III - Turma Especial

Ficha 1

A entregar na aula de 23 de Setembro

1. Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ funções diferenciáveis.

   (a) Mostre que a derivada de $f \circ \mathbf{g}$ é a derivada direccional de f segundo $\frac{d\mathbf{g}}{dt}$.

   (b) Suponha que o caminho $\mathbf{g}$ é percorrido com velocidade unitária, $\left\|\frac{d\mathbf{g}}{dt}\right\| = 1$, e satisfaz $\mathbf{g}(0) = \mathbf{x}_0$. Mostre que
$$\left|\frac{d(f \circ \mathbf{g})}{dt}(0)\right| \leq \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|.$$
   Mostre ainda que se $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ se tem
$$\frac{d(f \circ \mathbf{g})}{dt}(0) = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|$$
   exactamente quando
$$\frac{d\mathbf{g}}{dt}(0) = \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}$$
   (por outras palavras, o gradiente indica a direcção de crescimento máximo da função).

   (c) Um vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ diz-se *tangente* a um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ no ponto $\mathbf{x}_0 \in S$ se existe um caminho $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to S$ tal que $\mathbf{g}(0) = \mathbf{x}_0$ e $\frac{d\mathbf{g}}{dt}(0) = \mathbf{v}$. Um vector diz-se *ortogonal* a um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ no ponto $\mathbf{x}_0 \in S$ se é ortogonal a todos os vectores tangentes a S no ponto $\mathbf{x}_0$. Mostre que $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ é ortogonal ao conjunto de nível
$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)\}$$
   no ponto $\mathbf{x}_0$.

2. (a) Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diz-se *homogénea de grau* m se $f(t\mathbf{x}) = t^m f(\mathbf{x})$ para todo o $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$. Mostre que se f é diferenciável então
$$\sum_{i=1}^{n} x^i \partial_i f(\mathbf{x}) = m f(\mathbf{x})$$
   (*Teorema de Euler*).

   (b) O *problema dos N corpos* consiste no cálculo das trajectórias de N partículas pontuais de massas $m_1, \ldots, m_N > 0$ e posições $\mathbf{x}_1 \equiv (x_1, y_1, z_1), \ldots, \mathbf{x}_N \equiv (x_N, y_N, z_N) \in \mathbb{R}^3$ sob a acção das atracções gravitacionais mútuas. Definindo $r_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$ e
$$U = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$$

é possível escrever as equações diferenciais do movimento na forma

$$\ddot{q}_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

onde $q = x, y, z$ e $i = 1, \ldots, N$. Use o resultado do exercício anterior para mostrar que o problema dos N corpos não possui soluções de equilíbrio, i.e., soluções para as quais todas as coordenadas q_i são constantes.

3. Escreva na base canónica adequada

   (a) O tensor $T \in \mathcal{T}^2(\mathbb{R}^3)$ definido pela expressão

   $$T((x, y, z), (u, v, w)) = xv + yw - 2xu$$

   (b) O tensor $T \in \mathcal{T}^2(\mathbb{R}^n)$ definido pela expressão

   $$T(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$$

   (c) O tensor $T \in \mathcal{T}^2(\mathbb{R}^2)$ definido por

   $$T((x, y), (u, v)) = \begin{vmatrix} x & u \\ y & v \end{vmatrix}$$

   (d) O tensor $T \in \mathcal{T}^n(\mathbb{R}^n)$ definido pela expressão

   $$T(\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}) = \det\left[\mathbf{v_1} \ldots \mathbf{v_n}\right]$$

Não precisam de entregar:

4. Sejam V e W espaços vectoriais sobre $\mathbb{R}$. Um **produto tensorial** de V e W consiste num par $(V \otimes W, t)$ em que $V \otimes W$ é um espaço vectorial e $t : V \times W \to V \otimes W$ é uma função bilinear com a seguinte *propriedade universal*:

   Dado um espaço vectorial U e uma aplicação bilinear $f : V \times W \to U$, existe uma única aplicação linear $\overline{f}\colon\ : V \otimes W \to U$ tal que $f = \overline{f} \circ t$. Esta propriedade pode descrever-se esquematicamente pelo diagrama:

   $$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "t"] \arrow[d, "f"] & V \otimes W \arrow[dl, dashed, "\exists!\ \overline{f}"] \\ U & \end{tikzcd}$$

   É costume usar a notação $t(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$.

   (a) **O produto tensorial é único a menos de um isomorfismo único.** Mostre que se $(V \otimes W, t)$ e $(V \overline{\otimes} W, s)$ são produtos tensoriais de V e W existe uma única aplicação linear

   $$\phi\colon V \otimes W \to V \overline{\otimes} W$$

   tal que $\phi \circ t = s$. Conclua que ϕ é um isomorfismo.

(b) Mostre que o produto tensorial é associativo. Isto é, existe um isomorfismo único

$$V \otimes (W \otimes U) = (V \otimes W) \otimes U.$$

Assim, quando escrevemos um produto tensorial com vários factores podemos omitir parenteses. Sugestão: Mostre que ambos os espaços acima recebem uma aplicação trilinear de $V \times W \times U$, e que esta aplicação é universal no mesmo sentido que na alínea (a).

(c) Dado um espaço vectorial V, mostre que a aplicação

$$V^* \times \ldots \times V^* \to \mathcal{T}^k(V)$$

dada pela expressão

$$(\phi_1, \ldots, \phi_k) \mapsto \phi_1 \otimes \ldots \otimes \phi_k$$

é um produto tensorial, onde $V^* = L(V; \mathbb{R})$ e, por definição,

$$(\phi_1 \otimes \ldots \otimes \phi_k)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \phi_1(\mathbf{v}_1)\phi_2(\mathbf{v}_2)\ldots\phi_k(\mathbf{v}_k).$$

(d) Mostre que dados espaços vectoriais $V_1, \ldots, V_n$ e W, a aplicação

$$V_1^* \times \ldots \times V_n^* \times W \to L(V_1, \ldots, V_n; W)$$

dada pela expressão

$$(\phi_1, \ldots, \phi_k, \mathbf{w}) \mapsto \boldsymbol{\phi_1} \otimes \ldots \boldsymbol{\phi_k} \otimes \mathbf{w}$$

é um produto tensorial, onde, por definição,

$$(\phi_1 \otimes \ldots \otimes \phi_k \otimes \mathbf{w})(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \phi_1(\mathbf{v}_1)\phi_2(\mathbf{v}_2)\ldots\phi_k(\mathbf{v}_k)\mathbf{w}.$$

(e) Mostre que se $\{\mathbf{v}_\alpha\}$ e $\{\mathbf{w}_\beta\}$ são bases para V e W respectivamente e existe um produto tensorial $V \times W \to V \otimes W$ denotado por $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$, então $\{\mathbf{v}_\alpha \otimes \mathbf{w}_\beta\}$ é uma base para $V \otimes W$.

(f) **Existência de um produto tensorial.**[1] Sejam V, W espaços vectoriais. Seja

$$U = \{f \colon V \times W \to \mathbb{R} \colon f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 \text{ excepto para um número finito de } (\mathbf{v}, \mathbf{w})'s\}$$

o espaço com a soma e multiplicação por escalar definida da forma óbvia:

$$(\alpha f + \beta g)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \alpha f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \beta g(\mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Para cada $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in V \times W$ escrevemos $f_{(\mathbf{v},\mathbf{w})} \in U$ para a função definida pela fórmula

$$f_{(\mathbf{v},\mathbf{w})}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{cases} 1 & \text{se } (\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}.$$

Temos assim uma aplicação canónica $i \colon V \times W \to U$ definida por

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto f_{\mathbf{v},\mathbf{w}}.$$

[1] Esta construção será provavelmente muito difícil de seguir se não tiverem experiência com classes de equivalência - i.e. se não forem de Matemática.

Note-se que esta aplicação não é uma aplicação de espaços vectoriais, mas simplesmente uma função. A imagem de i é uma base para o espaço vectorial U e portanto podemos pensar em U como o espaço das combinações lineares formais de elementos de $V \times W$.

Seja $Z \subset U$ o subespaço vectorial de U gerado pelo conjunto dos vectores

$$\alpha f_{(\mathbf{v},\mathbf{w})} + \beta f_{(\mathbf{a},\mathbf{w})} - f_{(\alpha\mathbf{v}+\beta\mathbf{a},\mathbf{w})}$$

e

$$\alpha f_{(\mathbf{v},\mathbf{w})} + \beta f_{(\mathbf{v},\mathbf{b})} - f_{(\mathbf{v},\alpha\mathbf{w}+\beta\mathbf{b})}$$

para todos os $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mathbf{a}, \mathbf{v} \in V$ e $\mathbf{b}, \mathbf{w} \in W$.

O *espaço quociente* U/Z é o conjunto de subconjuntos de U

$$U/Z = \{u + Z \subset U : u \in U\}$$

com a soma e multiplicação por escalar definidas por

$$(u_1 + Z) + (u_2 + Z) = (u_1 + u_2) + Z \qquad \lambda(u + Z) = (\lambda u) + Z.$$

(i) Verifique que a definição de U/Z faz sentido e que dá ao conjunto U/Z a estrutura de um espaço vectorial.

(ii) Mostre que a aplicação

$$V \times W \to U/Z$$

definida por

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto f_{(\mathbf{v},\mathbf{w})} + Z$$

é um produto tensorial (i.e. $V \otimes W = U/Z$).