Instituto Superior Técnico/Departamento de Matemática/
Secção de Álgebra e Análise

Geometria Riemanniana - 1º semestre de 2009/10

Exame 1 - Parte 2 - 15/01/2010

Duração: 1 hora e 30 minutos

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

1) Seja M a imagem da parametrização $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\varphi(t,\theta) = (h(t)\cos\theta, h(t)\sin\theta, f(t)) \,,$$

onde

$$U = \{(t,\theta) \in \mathbb{R}^2 : -\infty < t < \infty \,,\, 0 < \theta < 2\pi\}$$

e $h, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis tais que $h > 0$ e

$$(h'(t))^2 + (f'(t))^2 = 1 \,.$$

(2 v) (a) Determine a métrica em M induzida pela métrica Euclideana de $\mathbb{R}^3$.

(3 v) (b) Determine as formas de conexão associadas ao referencial ortonormado

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad X_2 = \frac{1}{h(t)}\frac{\partial}{\partial\theta} \,.$$

(2 v) (c) Mostre que a curvatura de Gauss de M é

$$K_M = -\frac{h''(t)}{h(t)} \,.$$

(3 v) (d) Determine as funções $h(t)$ para as quais K_M é constante.

(3 v) (e) Descreva as superfícies com $K_M = 0$.

(4 v) **2)** Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão $m \geq 3$, conexa e isotrópica em todos os seus pontos. Mostre que M tem curvatura constante, ou seja, que a curvatura seccional K_M de M é constante.

Sugestão: mostre que $dK = 0$, utilizando $\Omega_i^{\ j} = -Kw^i \wedge w^j$ e as equações de estrutura num referencial móvel ortonormado.

VSFF

3) Seja M uma variedade Riemanniana orientada de dimensão n. Considere o isomorfismo $* : \Lambda^k T_p^* M \to \Lambda^{n-k} T_p^* M$ definido da seguinte forma: seja $\{\theta_1, \ldots, \theta_k, \theta_{k+1}, \ldots, \theta_n\}$ uma base ortonormada positivamente orientada de T_p^*M. Então $*(\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_k) = \theta_{k+1} \wedge \cdots \wedge \theta_n$, e define-se $*$ para qualquer elemento de $\Lambda^k T_p^* M$ por linearidade.

Considere k-formas w, η e mostre que

(1 v) (a) $** \, w = (-1)^{k(n-k)} \, w$,

(2 v) (b) $w \wedge *\eta = \eta \wedge *w$.

$\Sigma = 20$ v

Formulário

Equações de estrutura de Cartan num referencial móvel ortonormado $\{X_i\}_{i=1,\ldots,n}$:

$$\begin{aligned} dw^i &= \sum_{j=1}^n w^j \wedge w_j{}^i \, , \\ w_i{}^j &= -w_j{}^i \, , \\ dw_i{}^j &= \Omega_i{}^j + \sum_{k=1}^n w_i{}^k \wedge w_k{}^j \, . \end{aligned}$$