Instituto Superior Técnico/Departamento de Matemática/
Secção de Álgebra e Análise

Geometria Riemanniana - 1º semestre de 2009/10

Teste 1 - 02/11/2009

Duração: 1 hora e 30 minutos

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

1) Considere os campos vectoriais em $\mathbb{R}^3$ dados por

$$X = -\frac{\partial}{\partial x} + \pi\, y^4 \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} \quad , \quad Y = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} \quad , \quad Z = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \, .$$

(2 v) (a) Calcule $[X, Y]$ e $[Y, Z]$.

(2 v) (b) Calcule $[L_X, L_Y]\, Z$.

(3 v) (c) Determine a curva integral do campo $Y + Z$.

(1 v) (d) Diga, justificando, se existem coordenadas (v^1, v^2, v^3) em $\mathbb{R}^3$ tais que

$$X = 512\frac{\partial}{\partial v^3} \, , \; Y = 344\frac{\partial}{\partial v^1} \, .$$

2) Considere o grupo linear especial $SL_n(\mathbb{R})$ (com $n \geq 2$), de dimensão $n^2 - 1$,

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) |\, \det A = 1\} \;,$$

onde $M_n(\mathbb{R})$ é o conjunto das matrizes reais $n \times n$.

(2 v) (a) Determine o espaço tangente de $SL_n(\mathbb{R})$ na identidade I.

(1 v) (b) Determine uma base da álgebra de Lie de $SL_2(\mathbb{R})$.

(2 v) (c) Escreva uma fórmula explícita para a curva $\gamma : \mathbb{R} \to SL(2, \mathbb{R})$ dada por

$$\gamma : t \mapsto \exp(t\, A) \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \, .$$

(d) Seja

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}) \, .$$

(2 v) Use o resultado de (c) para escrever uma expressão para o fluxo $\phi_t(B)$ do campo invariante à esquerda X^A (com $X^A(I) = A$).

VSFF

3) Seja $\psi_t : S^2 \to S^2$ a rotação da esfera S^2 (centrada na origem), por um ângulo $t \in \mathbb{R}$, em torno do eixo $0z$. Estas rotações descrevem uma acção de grupo em S^2.

(2 v) (a) Determine as órbitas desta acção e diga, justificando, se o conjunto das classes de equivalência é ou não uma variedade topológica.

(1 v) (b) Mostre que ψ_t é o fluxo de um campo vectorial definido em S^2.

4) Seja $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável entre duas variedades diferenciais M e N. Seja X um campo vectorial em M e Y um campo vectorial em N.

(2 v) Mostre que $Y_{f(p)} = (Df)_p X_p$ *sse* $f(F_X(p,t)) = F_Y(f(p),t)$, onde $F_X(p,t)$ e $F_Y(f(p),t)$ designam o fluxo local de X e de Y em p e em $f(p)$, respectivamente.

$\Sigma = 20$ v