Instituto Superior Técnico/Departamento de Matemática/
Secção de Álgebra e Análise

Geometria Riemanniana - 1º semestre de 2009/10

Exame 2 - Parte 1 - 29/01/2010

Duração: 1 hora e 30 minutos

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

1) Considere os campos vectoriais em $\mathbb{R}^3$ dados por

$$X = \sqrt{x^2+y^2}\,\frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad Y = z\,\frac{\partial}{\partial z} \quad , \quad Z = z^{13}\,\frac{\partial}{\partial y} - 10845783\,y^{44}\,\frac{\partial}{\partial x} \; .$$

(1 v) (a) Calcule $[X, Y]$.

(1 v) (b) Calcule $[L_X, L_Y]\,Z$.

2) Considere a parametrização $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\varphi(t,\theta) = (h(t)\,\cos\theta, h(t)\,\sin\theta, f(t)) \; ,$$

onde

$$U = \{(t,\theta) \in \mathbb{R}^2 : -\infty < t < \infty \, , \, 0 < \theta < 2\pi\}$$

e $h, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis tais que $h > 0$ e

$$(h'(t))^2 + (f'(t))^2 = 1 \; .$$

(3 v) Mostre que φ é uma imersão.

3) Considere o campo vectorial em $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ dado por

$$X = \sqrt{x^2+y^2}\,\frac{\partial}{\partial x} \; .$$

(5 v) (a) Determine a sua curva integral.

Sugestão: use as funções $\exp[\pm t]$, $\sinh(t+c)$ para resolver as equações.

(1 v) (b) Será X completo?

(2 v) (c) O fluxo de X define uma acção de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$. Determine as suas órbitas.

VSFF

4) Seja $M = S^2 \times S^2$ e considere a seguinte acção de grupo em M,

$$e^{i\theta} \cdot (u, v) = (e^{i\theta} \cdot u, e^{2i\theta} \cdot v) \ ,$$

onde $u \in S^2 \subset \mathbb{R}^3, v \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$, $e^{i\theta} \in S^1$, e onde $e^{i\theta} \cdot u$ descreve a rotação da esfera S^2 (centrada na origem) por um ângulo θ em torno do eixo $0z$.

(3 v) (a) Determine os pontos fixos desta acção.

(4 v) (b) Determine os estabilizadores não-triviais. (Recorde-se que o estabilizador de $p \in M$ é o subgrupo $G_p \subset G$ dado por $G_p = \{g \in G | g \cdot p = p\}$.

$\Sigma = 20$ v

Instituto Superior Técnico/Departamento de Matemática/
Secção de Álgebra e Análise

Geometria Riemanniana - 1º semestre de 2009/10

Exame 2 - Parte 2 - 29/01/2010

Duração: 1 hora e 30 minutos

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

1) Seja (M, g) a variedade Riemanniana definida por $M = \mathbb{R}^2$ e

$$g = dr \otimes dr + \operatorname{senh}^2 r \, d\theta \otimes d\theta \ ,$$

onde (r, θ) são as habituais coordenadas polares em $\mathbb{R}^2$.

(3 v) (a) Determine as formas de conexão associadas ao referencial ortonormado

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial r} \quad , \quad X_2 = \frac{1}{\operatorname{senh} r} \frac{\partial}{\partial \theta} \ .$$

(3 v) (b) Mostre que as equações locais de uma geodésica são

$$\begin{aligned} \ddot{r} - \operatorname{senh} r \cosh r \, \dot{\theta}^2 &= 0 \ , \\ \ddot{\theta} + 2 \frac{\cosh r}{\operatorname{senh} r} \dot{r} \, \dot{\theta} &= 0 \ . \end{aligned}$$

(1 v) (c) Mostre que todas as linhas rectas passando pela origem são geodésicas.

(2 v) (d) Mostre que (M, g) possui curvatura de Gauss $K = -1$.

(4 v) (e) Seja $C = \{r_0 < r < r_1\} \subset M$ uma coroa circular. Mostre que não existe nenhum mergulho isométrico $f : C \to \mathbb{R}^3$ da forma

$$f(r, \theta) = (\rho(r) \cos \theta, \rho(r) \operatorname{sen} \theta, z(r)) \ .$$

2) Seja $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade Riemanniana de dimensão n, $\{X_1, \ldots, X_n\}$ um referencial móvel definido nalgum aberto $V \subset M$, e $\{w^1, \ldots, w^n\}$ o co-referencial dual. Definem-se as funções de estrutura ${D^k}_{ij}$ do referencial através de

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=}^{n} {D^k}_{ij} \, X_k \ ,$$

e os símbolos de Christoffel mediante

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^{n} {\Gamma^k}_{ij} \, X_k \ ,$$

onde ∇ é a conexão de Levi-Civita.

VSFF

Mostre que:

(2 v) (a) $D^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{jk} - \Gamma^i{}_{kj}$;

(b)

$$\begin{aligned}\Gamma^i{}_{jk} &= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^n g^{il}\left(X_j \cdot g_{kl} + X_k \cdot g_{jl} - X_l \cdot g_{jk}\right) \\ &+\frac{1}{2}\,D^i{}_{jk} - \frac{1}{2}\sum_{l,m=1}^n g^{il}\left(g_{jm}\,D^m{}_{kl} + g_{km}\,D^m{}_{jl}\right) \ ;\end{aligned}$$

(2 v)

(3 v) (c) $dw^i + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^n D^i{}_{jk}\,w^j \wedge w^k = 0$.

$\Sigma = 20$ v

Formulário

- Equações de estrutura de Cartan num referencial móvel ortonormado $\{X_i\}_{i=1,\ldots,n}$:

$$\begin{aligned} dw^i &= \sum_{j=1}^n w^j \wedge w_j{}^i \ , \\ w_i{}^j &= -w_j{}^i \ , \\ dw_i{}^j &= \Omega_i{}^j + \sum_{k=1}^n w_i{}^k \wedge w_k{}^j \ . \end{aligned}$$

- Em duas dimensões, $\Omega_i{}^j = -K\,w^i \wedge w^j$.
- Equações locais de uma geodésica (em coordenadas locais $(x^1, \ldots, x^n)$):

$$\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^n \Gamma^i{}_{jk}\,\dot{x}^j\,\dot{x}^k = 0 \ .$$

- Torsão: $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$.
- Fórmula de Koszul:

$$\begin{aligned} 2\,\langle \nabla_X Y, Z\rangle &= X \cdot \langle Y,Z\rangle + Y \cdot \langle X,Z\rangle - Z \cdot \langle X,Y\rangle \\ &-\langle [X,Z],Y\rangle - \langle [Y,Z],X\rangle + \langle [X,Y],Z\rangle \ . \end{aligned}$$

- Seja w uma forma de grau 1, e X, Y campos vectoriais. Então:

$$dw(X,Y) = X \cdot (w(Y)) - Y \cdot (w(X)) - w([X,Y]) \ .$$