Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste de Recuperação / Exame – 23 de Junho de 2012 – 8h – Versão B
Duração Teste: 90 minutos – Duração Exame: 3 horas

Apresente e justifique todos os cálculos

1º Teste

1. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^p}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

onde p é um parâmetro real positivo.

(1.5 val.) (a) Diga, justificadamente, se f é contínua na origem para $p > 4$.

(1 val.) (b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(1.5 val.) (c) Diga, justificadamente, se f é diferenciável na origem para $p = 5$.

2. Seja $f(t,\phi) = (te^{\phi}, te^{-\phi})$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^1 tal que

$$Dg(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja $h = g \circ f$.

(1.5 val.) (a) Calcule $Dh(1,0)$;

(1 val.) (b) Calcule a derivada de h no ponto $(1,0)$ segundo o vector $v = (3,1)$.

(3 val.) 3. Diga, justificadamente, se a função $h(x,y) = \frac{1}{3}y^3 - y - x^3 + 12x$ tem extremos locais.

4. Considere o conjunto definido por

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < y < 2 \ ; \ 0 < x < 2y + z\}.$$

Escreva uma expressão para o volume de D em termos de integrais iterados da forma:

(2 val.) (a) $\int(\int(\int dx)dy)dz$;

(2.5 val.) (b) $\int(\int(\int dz)dy)dx$.

(3 val.) 5. Usando uma mudança de coordenadas apropriada, calcule o volume do conjunto

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < \left(y^2+z^2\right)^{1/4} \ ; \ x^2+y^2+z^2 < 2 \ ; \ z > 0\}.$$

(3 val.) 6. Seja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 que, para um dado $a \in \mathbb{R}$, satisfaz a identidade

$$ag(x) = x \cdot \nabla g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Mostre que g satisfaz a igualdade

$$g(tx) = t^a\, g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Sugestão: Considere a função $\psi(t) = t^a g(x) - g(tx)$.

2º Teste

1. Considere o conjunto

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2 \ ; \ z + y = 1\}.$$

(2 val.) (a) Mostre que M é uma variedade e determine a sua dimensão.

(2 val.) (b) Determine a recta tangente a M no ponto $(0,0,1)$.

(2 val.) (c) Determine o valor mínimo da função $f(x,y,z) = z + y - x$ em M.

(3 val.) 2. Mostre que a função $f(x,y) = (\arctan y + \cos x, xe^y + e^x)$ é localmente injectiva em torno do ponto $(0,0)$, com inversa de classe C^1. Calcule a derivada da inversa no ponto $(1,1)$.

(2 val.) 3. Calcule o integral de linha

$$\oint_L (\ln(x+2) + 2xy)\, dx + (x + x^2 - \cos y^3)\, dy,$$

onde L é o quadrado de vértices nos pontos $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ e $(1,-1)$, percorrido no sentido horário.

(2 val.) 4. Considere a superfície

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, 0 < x < 2, \, x = 4 - 2\sqrt{y^2 + z^2}\}.$$

Calcule a massa de M, sabendo que a densidade de massa é dada por $\sigma(x,y,z) = 1 + y^2 + z^2$.

5. Considere a variedade de dimensão 2

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + z^2 = 1 + y^2 \ ; \ 0 < y < 1\right\},$$

orientada com a normal unitária $n = (n_x, n_y, n_z)$ tal que $n_y > 0$. Sejam G e H os campos vectoriais definidos em $\mathbb{R}^3$ por

$$G(x,y,z) = (-y, y, x - z) \quad \text{e} \quad H(x,y,z) = (-y, z - \cos(\pi x), x + z).$$

(3 val.) (a) Usando o teorema de Stokes, calcule o fluxo de G através de S no sentido de n.

(1 val.) (b) Calcule o fluxo de $\operatorname{rot} H$ através de S no sentido de n.

(3 val.) 6. Seja D o conjunto dado por

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \int_0^1 \operatorname{sen}(zt)\, e^{xt^2}\, dt + \int_0^1 \cos(zt)\, e^{yt^2}\, dt = 1\right\}.$$

Mostre que existe uma vizinhança U do ponto $(0,0,0)$, um aberto $V \subset \mathbb{R}^2$ e uma função g de classe C^1 tal que

$$D \cap U = \{(x,y,g(x,y)) \in \mathbb{R}^3 : \ (x,y) \in V\}.$$