Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste de Recuperação / Exame – 23 de Junho de 2012 – 8h – Versão A

Duração Teste: 90 minutos – Duração Exame: 3 horas

Apresente e justifique todos os cálculos

1º Teste

1. Considere a função

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^k\, y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

onde k é um parâmetro real positivo.

(1.5 val.) (a) Diga, justificadamente, se g é contínua na origem para $k > 1$.

(1 val.) (b) Calcule $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)$.

(1.5 val.) (c) Diga, justificadamente, se g é diferenciável na origem para $k = 2$.

2. Seja $g(t,\theta) = (e^t \cos\theta, e^t \operatorname{sen}\theta)$ e $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^1 tal que

$$Dh(1,0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Seja $\varphi = h \circ g$.

(1.5 val.) (a) Calcule $D\varphi(0,0)$;

(1 val.) (b) Calcule a derivada de φ no ponto $(0,0)$ segundo o vector $v = (-1,2)$.

(3 val.) 3. Diga, justificadamente, se a função $f(x,y) = \frac{16}{5}x^5 + y^5 - x - 5y$ tem extremos locais.

4. Considere o conjunto definido por

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < y < 1\ ;\ 0 < z < x + y\}.$$

Escreva uma expressão para o volume de B em termos de integrais iterados da forma:

(2 val.) (a) $\int(\int(\int dz)dy)dx$;

(2.5 val.) (b) $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

(3 val.) 5. Usando uma mudança de coordenadas apropriada, calcule o volume do conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y > \left(x^2+z^2\right)^{1/4}\ ;\ x^2+y^2+z^2 < 2\ ;\ x > 0\}.$$

(3 val.) 6. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 que, para um dado $\alpha \in \mathbb{R}$, satisfaz a identidade

$$x \cdot \nabla f(x) = \alpha f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Mostre que f satisfaz a igualdade

$$f(tx) = t^\alpha f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Sugestão: Considere a função $\varphi(t) = f(tx) - t^\alpha f(x)$.

2º Teste

1. Considere o conjunto

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2 \ ; \ z + x = 1\}.$$

(2 val.) (a) Mostre que M é uma variedade e determine a sua dimensão.

(2 val.) (b) Determine a recta tangente a M no ponto $(0,0,1)$.

(2 val.) (c) Determine o valor máximo da função $f(x,y,z) = x + y + z$ em M.

(3 val.) 2. Mostre que a função $f(x,y) = (ye^x + e^y, \arctan x + \cos y)$ é localmente injectiva em torno do ponto $(0,0)$, com inversa de classe C^1. Calcule a derivada da inversa no ponto $(1,1)$.

(2 val.) 3. Calcule o integral de linha

$$\oint_T (e^{x^3} - y)\, dx + (x + \operatorname{sen} y^2)\, dy,$$

onde T é o triângulo de vértices nos pontos $(0,1)$, $(-1,0)$ e $(1,0)$, percorrido no sentido horário.

(2 val.) 4. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 < y < 1, \ y = 2 - x^2 - z^2\}.$$

Calcule a massa de S, sabendo que a densidade de massa é dada por $\alpha(x,y,z) = \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2}$.

5. Considere a variedade de dimensão 2

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y^2 + z^2 = 2 + x^2 \ ; \ 0 < x < 1\right\},$$

orientada com a normal unitária $n = (n_x, n_y, n_z)$ tal que $n_x < 0$. Sejam F e G os campos vectoriais definidos em $\mathbb{R}^3$ por

$$F(x,y,z) = (x, -x, y - z) \quad \text{e} \quad G(x,y,z) = (x, z + \operatorname{sen}(\pi x), y - z).$$

(3 val.) (a) Usando o teorema de Stokes, calcule o fluxo de F através de M no sentido de n.

(1 val.) (b) Calcule o fluxo de $\operatorname{rot} G$ através de M no sentido de n.

(3 val.) 6. Seja A o conjunto dado por

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \int_0^1 \operatorname{sen}(zt)\, e^{xt^2}\, dt + \int_0^1 \cos(zt)\, e^{yt^2}\, dt = 1\right\}.$$

Mostre que existe uma vizinhança V do ponto $(0,0,0)$, um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ e uma função f de classe C^1 tal que

$$A \cap V = \{(x, y, f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 : \ (x,y) \in U\}.$$