Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

TESTE 2 - VERSÃO B

3 de Junho de 2013 - das 9h00 às 10h30

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto definido por

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2z = 2 - x - y \ , \ x^2 + y^2 + 2z^2 = 2\} \ .$$

[2 v] (a) Mostre que C é uma variedade e determine a sua dimensão.

[1 v] (b) Determine o espaço normal a C no ponto $(1, 1, 0)$.

[3 v] 2. Calcule o máximo da função $g(x, y) = x^2 - 2y + y^2$ na região $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$.

3. Considere o campo vectorial

$$H(x, y) = (-\cos y + 1, x(\operatorname{sen} y - 4)) \ .$$

[1 v] (a) Mostre que H não é gradiente no seu domínio.

[2 v] (b) Considere a linha que delimita a região $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \ , \ x < 0, y < 0\}$. Utilize o Teorema de Green para calcular o trabalho realizado pelo campo H quando esta linha é percorrida uma vez no sentido horário.

[4 v] 4. Considere a pirâmide $P \subset \mathbb{R}^3$ limitada pelos três planos coordenados e pelo plano $x+y+z = 1$. Considere o campo vectorial $F(x, y, z) = \left(-(x^3z + xy^2), \frac{1}{3}y^3 + 3x^2yz, 1\right)$. Usando o Teorema da Divergência, calcule o fluxo de F através da face de P que está contida no plano $x + y + z = 1$, no sentido da normal unitária exterior.

5. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \sqrt{y^2 + z^2} - 1 \ , \ 0 < x < 1\} \ ,$$

orientada com a normal unitária n tal que $n_x < 0$.

[1 v] (a) Determine um campo vectorial A da forma

$$A(x, y, z) = (\alpha(y, z), 0, yz)$$

tal que $rot\, A = G$, onde $G(x, y, z) = (z, z, y)$.

[3 v] (b) Usando o Teorema de Stokes, calcule o fluxo do campo vectorial G através de S no sentido da normal n.

[3 v] 6. Considere o aberto $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : ||x|| < 2\}$. Mostre que, para quaisquer campos escalares F e G de classe C^2 tal que $F(x) = 0$ e $G(x) = 0$ quando $||x|| > 1$, se tem

$$\int_M (div \nabla G)\, F = \int_M G \ div \nabla F \ .$$