Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 1) - 13 de Abril de 2013 - 11h00
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere as funções $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{6x^3y}{2x^4+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad g(x,y) = \frac{y}{1+x^2}.$$

(2 val.) a) Determine o conjunto de pontos em que a função f é contínua.

(1 val.) b) Fazendo $h = f + g$, calcule $\dfrac{\partial h}{\partial x}(0,0)$.

2. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x,y) = f(x^2 - y^2, y^2 - x^2)$ onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável tal que $\nabla f(1,-1) = (1,0)$.

(2 val.) a) Calcule $Dg(1,0)$.

(1 val.) b) Mostre que $y\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) + x\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = xy^2 - x^2 - y^2 + 2.$$

4. Considere o conjunto

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z < x + y \; ; \; 0 < x < 1 \; ; \; 0 < y < 1 \; ; \; z > 0\}.$$

(3 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de X em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int \left(\int dx \right) dy \right) dz$.

(2 val.) b) Calcule $\displaystyle\int_X f$, em que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é a função definida por $f(x,y,z) = y$, usando um único integral triplo.

(3 val.) 5. Usando coordenadas cilíndricas, calcule o volume do conjunto

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+z^2} < y < 2 - x^2 - z^2 \; ; \; x > 0\}.$$

(3 val.) 6. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função tal que $|f(x)| \leq ||x||^2$. Mostre que f é diferenciável na origem e calcule a derivada $Df(0)$.