

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste de Recuperação / Exame - 24 de Junho de 2013 - 15h - Versão B

Duração: 1h30m (Teste) / 3h (Exame)

Apresente e justifique todos os cálculos

Teste 1

1. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(u, v) = \begin{cases} \frac{uv^2}{2u^2 + v^2} & \text{se } (u, v) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (u, v) = (0, 0) \end{cases}$$

(0,5 val)

(a) Determine em que pontos g é contínua.

(1 val)

(b) Calcule a derivada de g segundo o vector $v = (2, 1)$ na origem.

2. Sendo $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = x + x^2y + y^2$, e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^1 que satisfaz

$$g\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{-n}{n^2 + 1}, \frac{n^2 - n}{n^2 + 1}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

(0,5 val)

(a) Calcule $g(0)$ e $g'(0)$;

(0,5 val)

(b) Calcule $(h \circ g)'(0)$.

(2 val)

3. Determine e classifique os pontos críticos da função

$$f(x, y) = x^2 + 2x + y^2e^y.$$

4. Considere o sólido V

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 2y < 2, 0 < z < 1 + y^2\}.$$

(1 val)

(a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

(1,5 val)

(b) Calcule o integral $\int_V x$ usando a ordem de integração $\int(\int(\int dz)dx)dy$.

(1,5 val)

5. Seja A o sólido dado por:

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + z^2} < y < 1\}.$$

Calcule o momento de inércia de A relativo ao eixo Oy considerando uma densidade de massa $\beta(x, y, z) = y$.

(1,5 val)

6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(2, 1) = 2$, f é diferenciável no ponto $(2, 1)$ e $\nabla f(2, 1) = (1, 4)$. Considere a função $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$H(x, y) = \left(\frac{-4}{f(x, y)} + 4, f(-3y + f(x, y) + 3, -x/4 + 3/2) - 1\right).$$

Calcule $DH^m(2, 1)$, onde H^m é a composição m vezes da função H com si própria.

Teste 2

1. Considere o conjunto

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (z - y)^2 + x^2 = 1, x + y + z = 1\}.$$

- (0,5 val) (a) Mostre que B é uma variedade e determine a sua dimensão.
(1 val) (b) Determine um vector tangente a B no ponto $(0, 0, 1)$.

(1,5 val) 2. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} (x - z)^2 = y \\ x + 2z = 1 + \log y \end{cases}$$

Determine se numa vizinhança do ponto $(x, y, z) = (1, 1, 0)$ as soluções do sistema são dadas por um gráfico de uma função de classe C^1 da forma $(y, z) = f(x)$. Em caso afirmativo, calcule $f'(1)$.

3. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = \sqrt{x^2 + z^2}, 1 < y < 4\},$$

orientada segundo a normal unitária n tal que $n_y > 0$.

- (2,5 val) (a) Calcule o fluxo de $F(x, y, z) = (-xy, 1 + y^2, -yz)$ através de S no sentido de n .
(1 val) (b) Calcule o fluxo de $\text{rot } F$ através de S no sentido de n , onde F é o campo da alínea anterior.
(2 val) (c) Calcule o fluxo de $G(x, y, z) = (3, 2, 1)$ através de S no sentido de n , utilizando o teorema de Stokes.

(1,5 val) 4. Seja $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$. Considere um campo vectorial de classe C^1 ,

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ F(x, y, z) &= \phi(r)(x, y, z), \end{aligned}$$

onde $\phi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 .

Sabendo que $\text{div } F = 0$ e que $F(1, 0, 0) = (3, 0, 0)$, determine $\phi(r)$.