Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste de Recuperação / Exame - 24 de Junho de 2013 - 15h - Versão A
Duração: 1h30m (Teste) / 3h (Exame)

Apresente e justifique todos os cálculos

Teste 1

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{3x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(0,5 val) (a) Determine em que pontos f é contínua.

(1 val) (b) Calcule a derivada de f segundo o vector $v = (1,2)$ na origem.

2. Sendo $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = x^2 + xy^2 + y$, e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^1 que satisfaz

$$h\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n^2 - n}{n^2 + 1}, \frac{n}{n^2 + 1}\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

(0,5 val) (a) Calcule $h(0)$ e $h'(0)$;

(0,5 val) (b) Calcule $(g \circ h)'(0)$.

(2 val) 3. Determine e classifique os pontos críticos da função

$$f(x,y) = e^{-x} x^2 + y^2 - y.$$

4. Considere o sólido W

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 < y < 2x < 2 \ , \ 0 < z < 1 + x^2\} \ .$$

(1 val) (a) Escreva uma expressão para o volume de W em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dy)dx)dz$.

(1,5 val) (b) Calcule o integral $\int_W y$ usando a ordem de integração $\int(\int(\int dz)dy)dx$.

(1,5 val) 5. Seja B o sólido dado por:

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \sqrt{y^2 + z^2} < x < 1\} \ .$$

Calcule o momento de inércia de B relativo ao eixo Ox considerando uma densidade de massa $\alpha(x,y,z) = x$.

(1,5 val) 6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $f(2,1) = 2$, f é diferenciável no ponto $(2,1)$ e $\nabla f(2,1) = (1,4)$. Considere a função $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$H(x,y) = \left(\frac{-4}{f(x,y)} + 4 \, , \ f(-3y + f(x,y) + 3, -x/4 + 3/2) - 1\right) .$$

Calcule $DH^m(2,1)$, onde H^m é a composição m vezes da função H com si própria.

Teste 2

1. Considere o conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-y)^2 + z^2 = 1,\ x+y+z = 1\}.$$

(0,5 val) (a) Mostre que A é uma variedade e determine a sua dimensão.

(1 val) (b) Determine um vector tangente a A no ponto $(1,0,0)$.

(1,5 val) 2. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} (x+y)^2 &= z \\ x - 2y &= 1 + \log z \end{cases}$$

Determine se numa vizinhança do ponto $(x,y,z) = (1,0,1)$ as soluções do sistema são dadas por um gráfico de uma função de classe C^1 da forma $(x,y) = f(z)$. Em caso afirmativo, calcule $f'(1)$.

3. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = \sqrt{y^2+z^2}, 1 < x < 4\},$$

orientada segundo a normal unitária n tal que $n_x > 0$.

(2,5 val) (a) Calcule o fluxo de $F(x,y,z) = (1+x^2, -xy, -xz)$ através de S no sentido de n.

(1 val) (b) Calcule o fluxo de rot F através de S no sentido de n, onde F é o campo da alínea anterior.

(2 val) (c) Calcule o fluxo de $G(x,y,z) = (1,2,3)$ através de S no sentido de n, utilizando o teorema de Stokes.

(1,5 val) 4. Seja $r = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$. Considere um campo vectorial de classe C^1,

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} &\to \mathbb{R}^3 \\ F(x,y,z) &= \phi(r)(x,y,z), \end{aligned}$$

onde $\phi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1.

Sabendo que div $F = 0$ e que $F(1,0,0) = (3,0,0)$, determine $\phi(r)$.