Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 3

(Diferenciabilidade)

1. Calcule as derivadas parciais de cada uma das funções seguintes:

   a) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$

   b) $g(x,y) = \log \sqrt{1+xy}$

   c) $h(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

2. Calcule as derivadas parciais na origem da função: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^4}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

3. Calcule a matriz Jacobiana de cada uma das funções seguintes:

   a) $f(x,y) = (\dfrac{x}{y}, xy)$

   b) $g(x,y,z) = (\sqrt{yz}, e^{xyz})$

   c) $h(x,y,z) = (x^2, xz-y, z^4)$

   d) $\phi(x,y,z) = x^2 - xyz + z^4$

   e) $\gamma(t) = (t^2, e^{2t}, \dfrac{1}{t})$

4. Calcule as derivadas de cada uma das funções seguintes no ponto P e segundo o vector $\mathbf{v}$ indicados:

   a) $f(x,y) = x^y\,;\ P = (1,1)\,;\ \mathbf{v} = (1,2)$

   b) $g(x,y,z) = e^x + yz\,;\ P = (1,1,1)\,;\ \mathbf{v} = (1,-1,1)$

5. Determine um vector segundo o qual a derivada da função $f(x,y) = x^2+y^3+1$, no ponto $(1,1)$ é nula.

6. Mostre que a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2}$ é diferenciável na origem e calcule a respectiva derivada.

7. Considere as funções:

   i) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   ii) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   iii) $g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   Qual destas funções é diferenciável na origem? Justifique.

8. Considere a função: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   a) Calcule as derivadas parciais de f no ponto $(1,0)$.

   b) Calcule a derivada de f no ponto $(1,0)$ segundo o vector $(1,2)$.

   c) Calcule a derivada de f no ponto $(0,0)$ segundo o vector $(1,1)$.