

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 2

(Topologia. Limites. Continuidade)

1. Para cada um dos seguintes conjuntos determine o interior, o exterior e a fronteira e diga, justificando, se é aberto, fechado, limitado ou compacto.

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ln(xy) \leq 0\}$
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z < 1\}$
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1; y = x\}$

2. Calcule ou mostre que não existem os limites seguintes:

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{(x-2)^2 y^2}{(x-2)^2 + y^2}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \sin(x^2 + y^2)$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \ln(xy)$. (**Sugestão:** Considere a linha dada por $y = e^{-1/x^2}$).

3. Estude as funções seguintes quanto à continuidade:

- $f(x, y) = e^{x^2+3y}$
- $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
- $f(x, y) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right), & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
- $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
- $f(x, y) = \begin{cases} xy^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right), & \text{se } y \neq 0 \\ 0, & \text{se } y = 0 \end{cases}$