Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 10

(Extremos condicionados. Integrais de Campos Escalares em Variedades)

1. Para cada um dos casos seguintes, determine os extremos da função f no conjunto S:

   a) $f(x,y,z) = x+y+z, \qquad S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 = 2\, ;\, x+z = 1\}$.

   b) $f(x,y,z) = xyz, \qquad S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 = 1\}$.

2. Use o Método dos Multiplicadores de Lagrange para determinar os pontos de máximo da função $f(x,y) = x^2+y^2-x-y+1$ no disco de raio 1 e centro na origem de $\mathbb{R}^2$.

3. Determine os extremos absolutos da função $f(x,y,z) = x+y-z$ que se encontram na bola $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

4. As faces de uma caixa rectangular sem tampa têm área total igual a 16 m^2. Determine as dimensões da caixa que maximizam o respectivo volume.

5. Determine os extremos da função $f(x,y,z) = x+y+z$ na superfície definida por $xyz = 1$.

6. Determine os pontos da linha definida por $\left(\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen}(\frac{t}{2})\right)$; $t \in \mathbb{R}$, mais afastados da origem.

7. Calcule o comprimento do arco de hélice descrito pelo caminho
$$\alpha(t) = (t, \cos t, \operatorname{sen} t), \quad 0 \leq t \leq 4\pi.$$

8. Determine a massa total do fio descrito por
$$\gamma(t) = (t\cos t, t \operatorname{sen} t, t)\ ; \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$
com densidade de massa por unidade de comprimento $\sigma(x,y,z) = z$.

9. Considere o fio descrito pelas equações
$$x^2+y^2+z^2 = 1\ ;\ z = y,$$
com densidade de massa por unidade de comprimento $\sigma(x,y,z) = x^2+y^2$.
Determine a massa total e as coordenadas do respectivo centro de massa.

10. Considere a variedade-1 definida por
$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = z,\ 2x+2y+z = -1\},$$
e com densidade de carga eléctrica por unidade de comprimento dada por
$$\alpha(x,y,z) = \sqrt{5-8(x+1)(y+1)}.$$
Calcule a carga eléctrica total de C.

11. Considere a variedade-2
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = (x^2+y^2)^2,\ x^2+y^2 < 1\},$$
com densidade de massa dada por $\sigma(x,y,z) = \sqrt{1+16(x^2+y^2)^3}$. Calcule a massa total de S.

12. Calcule a área da superfície
$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1-\sqrt{x^2+y^2},\ \sqrt{3}|y| < |x|,\ z > 0\}.$$

13. Considere a superficíe

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy,\ 1 < x < 2,\ 1 < y < 2\},$$

com densidade de massa dada por $\alpha(x, y, z) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2+y^2}}$. Calcule o momento de inércia de B relativamente ao eixo Ox.

14. Calcule as coordenadas do centróide do hemisfério

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0\}, \qquad a > 0.$$