TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste (Versão B) 9 de Janeiro de 2017

Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(2,5) **I.** Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 0}(\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x)$, b) $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \log x$.

Solução: Usando a Regra de Cauchy, tem-se

a) $\lim_{x\to 0}(\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x) = \lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0.$

b) $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \log x = \lim_{x\to 0^+}\dfrac{\log x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = -\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0.$

(3,5) **II.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $\dfrac{x}{3+x^2}$, b) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$, c) $x \operatorname{arctg} x$.

Solução:

a) $$P\frac{x}{3+x^2} = \frac{1}{2}P\frac{2x}{3+x^2} = \frac{1}{2}\log(3+x^2).$$

b) $$P\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = 2P\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = 2e^{\sqrt{x}}.$$

c)

$$\begin{aligned} Px \operatorname{arctg} x &= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}P\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}P\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x\,. \end{aligned}$$

(4,0) **III.** Calcule a área da região plana definida pelas condições

$$0 \le x \le \log 2 \qquad \text{e} \qquad 0 \le y \le \frac{1}{4-e^x}\ .$$

Solução: Usando a integração por substituição ($t = e^x, x = \log t, dx/dt = t$), tem-se

$$A = \int_0^{\log 2}\frac{1}{4-e^x}\,dx = \int_1^2\frac{1}{(4-t)t}\,dt = \frac{1}{4}\int_1^2\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t-4}\right)dt = \frac{1}{4}\left[\log\left|\frac{t}{t-4}\right|\right]_1^2 = \frac{1}{4}\log 3.$$

(3,5) **IV.** Seja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função definida por

$$g(x) = \int_1^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt\,.$$

Mostre, usando integração por partes, que

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} g(x)dx \;=\; \sqrt{\pi}g(\sqrt{\pi}) - 1\ .$$

Solução: Tem-se

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} g(x)dx \; = [x\, g(x)]_0^{\sqrt{\pi}} - \int_0^{\sqrt{\pi}} x \,\mathrm{sen}(x^2)dx = \sqrt{\pi}\, g(\sqrt{\pi}) - 1,$$

onde se usou o Teorema Fundamental do Cálculo (justificar).

(4,0) **V.** Estude quanto à natureza (convergência simples, absoluta e divergência) as séries seguintes e calcule a soma de uma delas:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+5}{n\sqrt{n+1}+3n+1}\,, \qquad \text{b) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{2^{2n}}\,, \qquad \text{c) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2}\,.$$

Solução:
a) Divergente (comparar com a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/\sqrt{n}$).
b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{2^{2n}} = 3\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 3\,\frac{1}{1-3/4} = 12.$
c) Simplesmente convergente (usar o critério de Leibniz e comparar a série dos módulos com a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n$).

(2,5) **VI.** Sejam f uma função integrável e limitada no intervalo não degenerado $[a, b]$ e $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$\psi(t) = \int_a^t f(x)\, dx\,.$$

Mostre que existe uma constante $k > 0$ tal que, para quaisquer $u, v \in [a, b]$, se tem

$$|\psi(u) - \psi(v)| \leq k\, |u - v|\ .$$

Solução: Sendo f uma função limitada no intervalo $[a, b]$, existe $c > 0$ tal que, para qualquer t nesse intervalo, $|f(t)| \leq c$. Assim, se $u \geq v$,

$$|\psi(u) - \psi(v)| = \left|\int_v^u f(t)\, dt\right| \leq \int_v^u c\, dt \; \leq c(u-v),$$

obtendo-se, do mesmo modo, para $v \geq u$,

$$|\psi(u) - \psi(v)| = \left|\int_v^u f(t)\, dt\right| \leq \int_u^v c\, dt \; \leq c(v-u).$$

O resultado decorre das duas desigualdades anteriores.