

---

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

---

(2,5) **I.** Calcule, se existirem em  $\overline{\mathbb{R}}$ , os seguintes limites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{cosec} x - \cotg x)$ ,      b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sen} x \log x$ .

(3,5) **II.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a)  $\frac{x}{3 + x^2}$ ,      b)  $\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ ,      c)  $x \operatorname{arctg} x$ .

(4,0) **III.** Calcule a área da região plana definida pelas condições

$$0 \leq x \leq \log 2 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{4 - e^x}.$$

(3,5) **IV.** Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$g(x) = \int_1^x \operatorname{sen}(t^2) dt.$$

Mostre, usando integração por partes, que

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} g(x) dx = \sqrt{\pi} g(\sqrt{\pi}) - 1.$$

(4,0) **V.** Estude quanto à natureza (convergência simples, absoluta e divergência) as séries seguintes e calcule a soma de uma delas:

a)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+5}{n\sqrt{n+1} + 3n+1}$ ,      b)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{2^{2n}}$ ,      c)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2}$ .

(2,5) **VI.** Sejam  $f$  uma função integrável e limitada no intervalo não degenerado  $[a, b]$  e  $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por

$$\psi(t) = \int_a^t f(x) dx.$$

Mostre que existe uma constante  $k > 0$  tal que, para quaisquer  $u, v \in [a, b]$ , se tem

$$|\psi(u) - \psi(v)| \leq k |u - v|.$$