TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste (Versão A) 9 de Janeiro de 2017

Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(2,5) **I.** Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

$$\text{a)} \lim_{x\to\pi/2^-} (\sec x - \operatorname{tg} x), \qquad \text{b)} \lim_{x\to\pi/2^+} \cos x \log(x-\pi/2)\,.$$

Solução: Usando a Regra de Cauchy, tem-se:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2^-} (\sec x - \operatorname{tg} x) = \lim_{x\to\pi/2^-} \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x} = \lim_{x\to\pi/2^-} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = 0.$

b) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2^+} \cos x \log(x-\pi/2) = \lim_{x\to\pi/2^+} \frac{\log(x-\pi/2)}{\frac{1}{\cos x}} = \lim_{x\to\pi/2^+} \frac{\cos x}{x-\pi/2}\,\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = 0.$

(3,5) **II.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a)} \frac{1}{4-5x}, \qquad \text{b)} \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{x^2}, \qquad \text{c)}\ x\,\log(1+x)\ .$$

Solução:

a) $\displaystyle P\,\frac{1}{4-5x} = -\frac{1}{5}P\,\frac{-1}{4/5-x} = -\frac{1}{5}\log|4/5-x|.$

b) $\displaystyle P\,\frac{\operatorname{sen}(1/x)}{x^2} = \cos(1/x).$

c)

$$\begin{aligned} P\,x\,\log(1+x) &= \frac{x^2}{2}\log(1+x) - \frac{1}{2}P\,\frac{x^2}{1+x} = \frac{x^2}{2}\log(1+x) - \frac{1}{2}P\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right) \\ &= \left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\right)\log(1+x) + \frac{1}{2}x\left(1-\frac{1}{2}x\right). \end{aligned}$$

(4,0) **III.** Calcule a área da região plana definida pelas condições

$$0 \le x \le \log 2 \qquad \text{e} \qquad 0 \le y \le \frac{1}{3-e^x}\ .$$

Solução: Usando a integração por substituição ($t = e^x, x = \log t, dx/dt = t$), tem-se

$$A = \int_0^{\log 2} \frac{1}{3-e^x}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{(3-t)t}\,dt = \frac{1}{3}\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-3}\right)dt = \frac{1}{3}\left[\log\left|\frac{t}{t-3}\right|\right]_1^2 = \frac{2}{3}\log 2.$$

(3,5) **IV.** Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \int_{-1}^{x} e^{-t^2}\,dt\,.$$

Mostre, usando integração por partes, que

$$\int_0^1 f(x)dx \ = \ f(1) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}-1\right)\ .$$

Solução: Tem-se

$$\int_0^1 f(x)dx = [x\, f(x)]_0^1 - \int_0^1 x\, e^{-x^2} dx = f(1) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e} - 1\right),$$

onde se usou o Teorema Fundamental do Cálculo (justificar).

(4,0) **V.** Estude quanto à natureza (convergência simples, absoluta e divergência) as séries seguintes e calcule a soma de uma delas:

$$\text{a)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n(n+3)}}{n^2+2n+3}, \qquad \text{b)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{3^{n-1}}, \qquad \text{c)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}.$$

Solução:
a) Divergente (comparar com a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n$).
b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 6 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 6\, \frac{1}{1-1/3} = 9.$
c) Simplesmente convergente (usar o critério de Leibniz e comparar a série dos módulos com a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/\sqrt{n}$).

(2,5) **VI.** Sejam g uma função integrável e limitada no intervalo não degenerado $[a, b]$ e $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$\varphi(x) = \int_a^x g(t)\, dt\,.$$

Mostre que existe uma constante $c > 0$ tal que, para quaisquer $x, y \in [a, b]$, se tem

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq c\, |x - y|\ .$$

Solução: Sendo g uma função limitada no intervalo $[a, b]$, existe $c > 0$ tal que, para qualquer x nesse intervalo, $|g(x)| \leq c$. Assim, se $x \geq y$,

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = \left| \int_y^x g(t)\, dt \right| \leq \int_y^x c\, dt\ \leq c(x - y),$$

obtendo-se, do mesmo modo, para $y \geq x$,

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = \left| \int_y^x g(t)\, dt \right| \leq \int_x^y c\, dt\ \leq c(y - x).$$

O resultado decorre das duas desigualdades anteriores.