
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(2,5) **I.** Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} (\sec x - \operatorname{tg} x)$, b) $\lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \cos x \log(x - \pi/2)$.

(3,5) **II.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $\frac{1}{4 - 5x}$, b) $\frac{\operatorname{sen}(1/x)}{x^2}$, c) $x \log(1 + x)$.

(4,0) **III.** Calcule a área da região plana definida pelas condições

$$0 \leq x \leq \log 2 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{3 - e^x}.$$

(3,5) **IV.** Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \int_{-1}^x e^{-t^2} dt.$$

Mostre, usando integração por partes, que

$$\int_0^1 f(x) dx = f(1) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e} - 1 \right).$$

(4,0) **V.** Estude quanto à natureza (convergência simples, absoluta e divergência) as séries seguintes e calcule a soma de uma delas:

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n(n+3)}}{n^2 + 2n + 3}$, b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{3^{n-1}}$, c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$.

(2,5) **VI.** Sejam g uma função integrável e limitada no intervalo não degenerado $[a, b]$ e $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por

$$\varphi(x) = \int_a^x g(t) dt.$$

Mostre que existe uma constante $c > 0$ tal que, para quaisquer $x, y \in [a, b]$, se tem

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq c |x - y|.$$