Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste (Versão B) 12 de Novembro de 2016

Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(4,5) **I.** Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |2x+5| > 1\}, \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \ e^{x/\pi} \leq e\right\}.$$

a) Identifique os conjuntos A e B e mostre que

$$C = A \cap B =]-\infty, -3[\cup]-2, \pi].$$

Solução: $A =]-\infty, -3[\cup]-2, +\infty[$, $B =]-\infty, \pi]$ e portanto $C =]-\infty, -3[\cup]-2, \pi]$.

b) Indique os conjuntos dos minorantes e dos majorantes de C. Determine, se existirem, o supremo e o máximo de $C \cap \mathbb{Q}$.

Solução: O conjunto dos minorantes de C é o conjunto vazio, e o dos seus majorantes $[\pi, +\infty[$. Assim $\sup(C \cap \mathbb{Q}) = \pi$ e não existe máximo.

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Qualquer sucessão de termos em C tem um sublimite (em $\mathbb{R}$).

Solução: Falsa: por exemplo, $u_n = -3 - n$.

(ii) Qualquer sucessão decrescente, de termos em C, é convergente (em $\mathbb{R}$).

Solução: Falsa: por exemplo, $u_n = -3 - n$.

(iii) Se (u_n) é uma sucessão crescente, de termos em C, então (u_n) é convergente e $\lim u_n = \pi$.

Solução: Falsa: por exemplo, $u_n = 2 - \frac{1}{2n}$.

(3,5) **II.** Considere a sucessão (b_n) definida por

$$\begin{cases} b_1 = \dfrac{9}{2}, \\ b_{n+1} = \dfrac{b_n^2}{9} + 2 \quad , \quad \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Use o método de indução finita para mostrar que os termos da sucessão verificam $3 < b_n < 6$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

Solução: $b_1 = \frac{9}{2} \in]3, 6[$. Se $b_n \in]3, 6[$, então $1 < \dfrac{b_n^2}{9} < 4$ e portanto $3 < b_{n+1} < 6$.

b) Mostre que (b_n) é uma sucessão decrescente.

Solução: Como, da alínea anterior, $b_n \in]3, 6[$ e $b_{n+1} - b_n = \dfrac{b_n^2}{9} - b_n + 2 = \dfrac{1}{9}(b_n - 3)(b_n - 6)$, obtemos $b_{n+1} - b_n < 0$ para $n \in \mathbb{N}_1$.

c) Justifique que (b_n) é convergente e calcule o limite.

Solução: Temos $b_n \to \ell$ (Teo. Suc. Monótonas e Limitadas); da alínea anterior, b_n é decrescente, logo $\ell < 6$; como $\ell = \dfrac{\ell^2}{9} + 2 \Rightarrow \ell = 3 \vee \ell = 6$, concluímos que $\ell = 3$.

(3,5) **III.** Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

$$\text{a)} \lim \frac{n}{(-1)^n n^3 + 1}, \qquad \text{b)} \lim \frac{3^n - n^8}{3^{n+1} + n^6}, \qquad \text{c)} \lim \frac{n^{3n}}{(3n)!}.$$

Solução: a) 0, b) 1/3, c) 0, pois $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}(1+1/n)^{3n} \to \dfrac{e^3}{27} < 1.$

(6,0) **IV.** Considere a função $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{1+x^2}, & \text{se } x < 0, \\ \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

a) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

Solução: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{1+x^2} = 0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}) = \dfrac{\pi}{2}$.

b) Justifique que g é diferenciável e obtenha a função derivada g'.

Solução: Em cada um dos intervalos contidos no domínio, g é diferenciável: de facto, em $\mathbb{R}^+$ trata-se da soma de uma constante com a composta de duas funções diferenciáveis ($-\operatorname{arctg}$ e uma função racional) e em $\mathbb{R}^-$ a função é racional. Além disso, $g' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2}, & \text{se } x < 0, \\ \dfrac{1}{x^2+1}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

c) Verifique que existe o prolongamento por continuidade G de g ao ponto $x = 0$.

Solução: Como $\lim\limits_{x\to0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to0} g(x) = 0$, a função é prolongável por continuidade ao ponto 0, sendo o prolongamento $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $G(x) = g(x)$ se $x \neq 0$ e $G(0) = 0$.

d) Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais de G (use apenas os resultados das alíneas anteriores.

Solução: Tem-se $g'(x) > 0$ para $x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$ e $g'(x) < 0$ para $x \in]-1, 0[$. Logo G é estritamente decrescente em $]-1, 0[$ e estritamente crescente em $]0, +\infty[$, pelo que tem um mínimo local em $x = 0$ com $G(0) = 0$. Sendo também estritamente crescente em $]-\infty, -1[$, tem um máximo local em $x = 1$ com $G(1) = 1/2$.

(2,5) **V.** Seja $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável tal que $\lim\limits_{x\to-\infty} \psi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = -\infty$. Prove que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\psi'(c) = 0$.

Sugestão: Comece por verificar que existem $a < 0$ e $b > 0$ tais que $\psi(a) < \psi(0)$ e $\psi(b) < \psi(0)$.

Solução: Comece por verificar que das definições de $\lim\limits_{x\to\mp\infty} \psi(x) = -\infty$ resulta a existência de $a < 0$ e $b > 0$ tais que $\psi(a) < \psi(0)$ e $\psi(b) < \psi(0)$. Sendo ψ contínua nos intervalos $[a, 0]$ e $[0, b]$ e diferenciável nos seus interiores, aplicando o Teorema de Lagrange garante-se que existem $\alpha \in]a, 0[$ e $\beta \in]0, b[$ tais que

$$\psi'(\alpha) = \frac{\psi(0) - \psi(a)}{0 - a} > 0 \qquad \text{e} \qquad \psi'(\beta) = \frac{\psi(b) - \psi(0)}{b - 0} < 0.$$

Sendo ψ' uma função diferenciável e portanto contínua em $\mathbb{R}$, com $\psi'(\alpha) < 0$ e $\psi'(\beta) > 0$, o Teorema do Valor Intermédio assegura a existência de $c \in]\alpha, \beta[$ tal que $\psi'(c) = 0$.