Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste (Versão B)   12 de Novembro de 2016

Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(4,5) **I.** Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |2x+5| > 1\}, \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \ e^{x/\pi} \leq e\right\}.$$

a) Identifique os conjuntos A e B e mostre que

$$C = A \cap B = \,]-\infty, -3[\, \cup \,]-2, \pi]\,.$$

b) Indique os conjuntos dos minorantes e dos majorantes de C. Determine, se existirem, o supremo e o máximo de $C \cap \mathbb{Q}$.

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Qualquer sucessão de termos em C tem um sublimite (em $\mathbb{R}$).

(ii) Qualquer sucessão decrescente, de termos em C, é convergente (em $\mathbb{R}$).

(iii) Se (u_n) é uma sucessão crescente, de termos em C, então (u_n) é convergente e $\lim u_n = \pi$.

(3,5) **II.** Considere a sucessão (b_n) definida por

$$\begin{cases} b_1 = \dfrac{9}{2}, \\ b_{n+1} = \dfrac{b_n^2}{9} + 2 \quad , \quad \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Use o método de indução finita para mostrar que os termos da sucessão verificam $3 < b_n < 6$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Mostre que (b_n) é uma sucessão decrescente.

c) Justifique que (b_n) é convergente e calcule o limite.

(3,5) **III.** Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

$$\text{a) } \lim \frac{n}{(-1)^n n^3 + 1}, \qquad \text{b) } \lim \frac{3^n - n^8}{3^{n+1} + n^6}, \qquad \text{c) } \lim \frac{n^{3n}}{(3n)!}.$$

(6,0) **IV.** Considere a função $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{1+x^2}, & \text{se } x < 0, \\ \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

a) Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

b) Justifique que g é diferenciável e obtenha a função derivada g'.

c) Verifique que existe o prolongamento por continuidade G de g ao ponto $x = 0$.

d) Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais de G (use apenas os resultados das alíneas anteriores).

(2,5) **V.** Seja $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável tal que $\lim\limits_{x \to -\infty} \psi(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \psi(x) = -\infty$. Prove que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\psi'(c) = 0$.

Sugestão: Comece por verificar que existem $a < 0$ e $b > 0$ tais que $\psi(a) < \psi(0)$ e $\psi(b) < \psi(0)$.