Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste (Versão A)   12 de Novembro de 2016

Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(4,5) **I.** Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |2x+3| > 5\}, \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R}^+ : \log \frac{x}{\pi} \le 0\right\}.$$

a) Identifique os conjuntos A e B e mostre que

$$C = A \cap B =]1, \pi].$$

Solução: $A =]-\infty, -4[\cup]1, +\infty[$, $B =]0, \pi]$ e portanto $C =]1, \pi]$.

b) Indique os conjuntos dos minorantes e dos majorantes de C. Determine, se existirem, o supremo e o máximo de $C \cap \mathbb{Q}$.

Solução: O conjunto dos minorantes de C é $]-\infty, 1]$ e o dos seus majorantes $[\pi, +\infty[$. Assim $\sup(C \cap \mathbb{Q}) = \pi$ e não existe máximo.

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Qualquer sucessão de termos em C tem um sublimite (em $\mathbb{R}$).

Solução: Verdadeira: como qualquer sucessão de termos em C é limitada, o Teorema de Bolzano-Weierstrass garante que tem um sublimite.

(ii) Qualquer sucessão decrescente, de termos em C, é convergente (em $\mathbb{R}$).

Solução: Verdadeira: a sucessão é decrescente e limitada, e portanto convergente.

(iii) Se (u_n) é uma sucessão crescente, de termos em C, então (u_n) é convergente e $\lim u_n = \pi$.

Solução: Falsa: por exemplo, $u_n = 2 - \frac{1}{2n}$.

(3,5) **II.** Considere a sucessão (a_n) definida por

$$\begin{cases} a_1 = 3, \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a_n^2}{2} + 4\right) \end{cases}, \quad \text{se } n \ge 1.$$

a) Use o método de indução finita para mostrar que os termos da sucessão verificam $2 < a_n < 4$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

Solução: $a_1 = 3 \in]2, 4[$. Se $a_n \in]2, 4[$, então $6 < \dfrac{a_n^2}{2} + 4 < 12$ e portanto $2 < a_{n+1} < 4$.

b) Mostre que (a_n) é uma sucessão decrescente.

Solução: Como, da alínea anteiror,$a_n \in]2, 4[$, e $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a_n^2}{2} + 4\right) - a_n = \dfrac{1}{6}\left(a_n^2 - 6a_n + 8\right) = \dfrac{1}{6}(a_n - 2)(a_n - 4)$ obtemos $a_{n+1} - a_n < 0$ para $n \in \mathbb{N}_1$.

c) Justifique que (a_n) é convergente e calcule o limite.

Solução: Temos $a_n \to \ell$ (Teo. Suc. Monótonas e Limitadas); da alínea anterior, a_n é decrescente logo $\ell < 4$; como $\ell = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\ell^2}{2} + 4\right) \Rightarrow \ell = 2 \vee \ell = 4$, concluímos que $\ell = 2$.

(3,5) **III.** Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

$$\text{a)} \lim \frac{1}{(-1)^n n^2+3}, \qquad \text{b)} \lim \frac{4^{n+1}-n^{10}}{n^8+4^n}, \qquad \text{c)} \lim \frac{(2n)!}{n^{2n}}.$$

Solução: a) 0, b) 4, c) 0, pois $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\dfrac{1}{(1+1/n)^{2n}} \to \dfrac{4}{e^2} < 1$.

(6,0) **IV.** Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}, & \text{se } x < 0, \\ \dfrac{x}{1+x^2}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

a) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Solução: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\dfrac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}) = \dfrac{\pi}{2}$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{1+x^2} = 0$.

b) Justifique que f é diferenciável e obtenha a função derivada f'.

Solução: Em cada um dos intervalos contidos no domínio, f é diferenciável: de facto, em $\mathbb{R}^-$ trata-se da soma de uma constante com a composta de duas funções diferenciáveis (arctg e uma função racional) e em $\mathbb{R}^+$ a função é racional. Além disso, $f' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2+1}, & \text{se } x < 0, \\ \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

c) Verifique que existe o prolongamento por continuidade F de f ao ponto $x = 0$.

Solução: Como $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$, a função é prolongável por continuidade ao ponto 0, sendo o prolongamento $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $F(x) = f(x)$ se $x \neq 0$ e $F(0) = 0$.

d) Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais de F (use apenas os resultados das alíneas anteriores).

Solução: Tem-se $f'(x) > 0$ para $x \in]0,1[$ e $f'(x) < 0$ para $x \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$. Logo F é estritamente decrescente em $]-\infty,0[$ e estritamente crescente em $]0,1[$, pelo que tem um mínimo local em $x = 0$ com $F(0) = 0$. Sendo também estritamente decrescente em $]1,+\infty[$, tem um máximo local em $x = 1$ com $F(1) = 1/2$.

(2,5) **V.** Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável tal que $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\infty$. Prove que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi'(c) = 0$.

Sugestão: Comece por verificar que existem $a < 0$ e $b > 0$ tais que $\varphi(a) < \varphi(0)$ e $\varphi(b) < \varphi(0)$.

Solução: Comece por verificar que das definições de $\lim\limits_{x\to\mp\infty} \varphi(x) = -\infty$ resulta a existência de $a < 0$ e $b > 0$ tais que $\varphi(a) < \varphi(0)$ e $\varphi(b) < \varphi(0)$. Sendo φ contínua nos intervalos $[a,0]$ e $[0,b]$ e diferenciável nos seus interiores, aplicando o Teorema de Lagrange garante-se que existem $\alpha \in]a,0[$ e $\beta \in]0,b[$ tais que

$$\varphi'(\alpha) = \frac{\varphi(0)-\varphi(a)}{0-a} > 0 \qquad \text{e} \qquad \varphi'(\beta) = \frac{\varphi(b)-\varphi(0)}{b-0} < 0.$$

Sendo φ' uma função diferenciável e portanto contínua em $\mathbb{R}$, com $\varphi'(\alpha) < 0$ e $\varphi'(\beta) > 0$, o Teorema do Valor Intermédio assegura a existência de $c \in]\alpha,\beta[$ tal que $\varphi'(c) = 0$.