Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste (Versão A) 12 de Novembro de 2016

Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(4,5) **I.** Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |2x+3| > 5\}, \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R}^+ :\ \log\frac{x}{\pi} \leq 0\right\}.$$

a) Identifique os conjuntos A e B e mostre que

$$C = A \cap B =]1, \pi].$$

b) Indique os conjuntos dos minorantes e dos majorantes de C. Determine, se existirem, o supremo e o máximo de $C \cap \mathbb{Q}$.

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Qualquer sucessão de termos em C tem um sublimite (em $\mathbb{R}$).

(ii) Qualquer sucessão decrescente, de termos em C, é convergente (em $\mathbb{R}$).

(iii) Se (u_n) é uma sucessão crescente, de termos em C, então (u_n) é convergente e $\lim u_n = \pi$.

(3,5) **II.** Considere a sucessão (a_n) definida por

$$\begin{cases} a_1 = 3, \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a_n^2}{2} + 4\right) \end{cases}, \quad \text{se } n \geq 1.$$

a) Use o método de indução finita para mostrar que os termos da sucessão verificam $2 < a_n < 4$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Mostre que (a_n) é uma sucessão decrescente.

c) Justifique que (a_n) é convergente e calcule o limite.

(3,5) **III.** Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

$$\text{a) } \lim \frac{1}{(-1)^n n^2 + 3}, \qquad \text{b) } \lim \frac{4^{n+1} - n^{10}}{n^8 + 4^n}, \qquad \text{c) } \lim \frac{(2n)!}{n^{2n}}.$$

(6,0) **IV.** Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & \text{se } x < 0, \\ \dfrac{x}{1+x^2}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

a) Calcule $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Justifique que f é diferenciável e obtenha a função derivada f'.

c) Verifique que existe o prolongamento por continuidade F de f ao ponto $x = 0$.

d) Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais de F (use apenas os resultados das alíneas anteriores).

(2,5) **V.** Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável tal que $\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = -\infty$. Prove que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi'(c) = 0$.

Sugestão: Comece por verificar que existem $a < 0$ e $b > 0$ tais que $\varphi(a) < \varphi(0)$ e $\varphi(b) < \varphi(0)$.