Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste (Versão B)   4 de Janeiro de 2016

Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(2,5) **I.** Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{\log(1-\cos x)}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to \pi/2} \left(\frac{2x}{\pi}\right)^{\dfrac{1}{\cos x}}.$$

Solução: a) $1/2$ b) $e^{-2/\pi}$.

(3,5) **II.** 1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a) } \frac{\operatorname{sen} x}{2\cos x + 5}, \qquad \text{b) } \frac{\operatorname{arctg} x}{2(1+x^2)}.$$

Solução: a) $-\frac{1}{2}\log(2\cos x + 5)$ b) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}^2 x$.

2. Calcule

$$\int_0^{\log\sqrt{3}} \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}\, dx\,.$$

Solução: $\sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12}$.

(4,0) **III.** Calcule a área da região plana limitada pelas curvas

$$y = 2\operatorname{arctg} x, \qquad y = \pi - 2\operatorname{arctg} x \qquad \text{e} \qquad x = 0\ .$$

Solução: $\alpha = \int_0^1 (\pi - 4\operatorname{arctg} x)\, dx = 2\log 2$.

(4,0) **IV.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$g(t) = \int_2^t (2-t)\, f(x)\, dx\,.$$

a) Supondo que f é uma função positiva, mostre que $g(t) \le 0$ para todo o $t \in \mathbb{R}$.

Solução: Usando a monotonia do integral, $g(t) = (2-t)\int_2^t f(x)\,dx \le 0$ se $t \ge 2$ e $g(t) = -(2-t)\int_t^2 f(x)\,dx \le 0$ se $t \le 2$.

b) Justifique que g é diferenciável e calcule g'.

Solução: Como $g(t) = (2-t)\int_2^t f(x)\,dx$, o resultado decorre do Teorema Fundamental da Análise e do Teorema da derivada do produto. Tem-se $g'(t) = -\int_2^t f(x)\,dx + (2-t)f(t)\ ,\ t \in \mathbb{R}$.

c) Supondo que f é uma função ímpar e $f(-2) = 1$, determine o polinómio de Taylor de ordem 1, no ponto $a = -2$, da função g.

Solução: Tem-se $g(-2) = -4\int_{-2}^2 f(x)dx = 0$ e $g'(-2) = 4$. Logo $p_1(x) = 4(x+2)$.

(4,0) **V.** Estude quanto à natureza (convergência simples, absoluta e divergência) as séries seguintes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+5)\sqrt{n^2+1}}$, b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^5}}\cos(\frac{\pi}{n})$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^4+1}{n!}$, d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Solução: a) Divergente (comparar com $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$). b) Convergente ($\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^5}} \cos(\frac{\pi}{n}) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$). c) Convergente (usar o critério de D´Alembert). d) Simplesmente convergente (critério de Leibniz e comparação da série dos módulos com $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^{1/2}}$).

(2,0) **VI.** Seja $\phi \in C^2(\mathbb{R}^+)$ tal que $\phi'(1) = 0, \phi''(1) = 2$. Sendo $\varphi(x) = \phi(e^x)$, use a fórmula de MacLaurin, com resto de Lagrange, para calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2}.$$

Justifique os cálculos que efectuar.

Solução: Tem-se, para algum ξ entre 0 e x,

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{\varphi''(\xi)}{2}x^2 = \varphi(0) + \frac{1}{2}(e^{\xi}\phi''(e^{\xi}) + e^{2\xi}\phi'(e^{\xi}))x^2.$$

Pelo Teorema da continuidade da função composta, ϕ' e ϕ'' são contínuas em 1. Logo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x^2} = \lim_{\xi\to 0} \frac{1}{2}(e^{\xi}\phi''(e^{\xi}) + e^{2\xi}\phi'(e^{\xi})) = 1.$$