Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste (Versão B)   4 de Janeiro de 2016

Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(2,5) **I.** Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{\log(1-\cos x)}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to \pi/2} \left(\frac{2x}{\pi}\right)^{\frac{1}{\cos x}}.$$

(3,5) **II.** 1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a) } \frac{\operatorname{sen} x}{2\cos x + 5}, \qquad \text{b) } \frac{\operatorname{arctg} x}{2(1+x^2)}.$$

2. Calcule

$$\int_0^{\log\sqrt{3}} \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}\, dx\,.$$

(4,0) **III.** Calcule a área da região plana limitada pelas curvas

$$y = 2\operatorname{arctg} x, \qquad y = \pi - 2\operatorname{arctg} x \qquad \text{e} \qquad x = 0\ .$$

(4,0) **IV.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$g(t) = \int_2^t (2-t)\, f(x)\, dx\,.$$

a) Supondo que f é uma função positiva, mostre que $g(t) \leq 0$ para todo o $t \in \mathbb{R}$.

b) Justifique que g é diferenciável e calcule g'.

c) Supondo que f é uma função ímpar e $f(-2) = 1$, determine o polinómio de Taylor de ordem 1, no ponto $a = -2$, da função g.

(4,0) **V.** Estude quanto à natureza (convergência simples, absoluta e divergência) as séries seguintes:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+5)\sqrt{n^2+1}}, \qquad \text{b) } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^5}}\cos\left(\frac{\pi}{n}\right), \qquad \text{c) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^4+1}{n!}, \qquad \text{d) } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

(2,0) **VI.** Seja $\phi \in C^2(\mathbb{R}^+)$ tal que $\phi'(1) = 0, \phi''(1) = 2$. Sendo $\varphi(x) = \phi(e^x)$, use a fórmula de MacLaurin, com resto de Lagrange, para calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2}\,.$$

Justifique os cálculos que efectuar.