Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste (Versão A)   4 de Janeiro de 2016

Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(2,5) **I.** Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{\log(\operatorname{sen} x)}{\log x}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 1} (2-x)^{\dfrac{1}{\cos(\pi x/2)}}.$$

Solução: a) 1 b) $e^{2/\pi}$.

(3,5) **II.** 1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a) } e^x \operatorname{sen}(5+3e^x), \qquad \text{b) } \frac{2\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Solução: a) $-\frac{1}{3}\cos(5+3e^x)$ b) $-\arccos^2 x$.

2. Calcule

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\, dx.$$

Solução: $e-1+\log\frac{2}{e+1}$.

(4,0) **III.** Calcule a área da região plana limitada pelas curvas

$$y=\pi+2\operatorname{arctg} x, \qquad y=-2\operatorname{arctg} x \qquad \text{e} \qquad x=0\ .$$

Solução: $\alpha=\int_{-1}^{0}(\pi+4\operatorname{arctg} x)\,dx = 2\log 2$.

(4,0) **IV.** Seja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x)=\int_{-2}^{x}(x+2)\,g(t)\,dt\,.$$

a) Supondo que g é uma função positiva, mostre que $f(x)\geq 0$ para todo o $x\in\mathbb{R}$.

Solução: Usando a monotonia do integral, $f(x)=(x+2)\int_{-2}^{x} g(t)\,dt \geq 0$ se $x\geq -2$ e $f(x)=-(x+2)\int_{x}^{-2} g(t)\,dt\geq 0$ se $x\leq -2$.

b) Justifique que f é diferenciável e calcule f'.

Solução: Como $f(x)=(x+2)\int_{-2}^{x} g(t)\,dt$, o resultado decorre do Teorema Fundamental da Análise e do Teorema da derivada do produto. Tem-se $f'(x)=\int_{-2}^{x} g(t)\,dt+(x+2)g(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

c) Supondo que g é uma função ímpar e $g(2)=1$, determine o polinómio de Taylor de ordem 1, no ponto $a=2$, da função f.

Solução: Tem-se $f(2)=4\int_{-2}^{2} g(t)dt=0$ e $f'(2)=4$. Logo $p_1(x)=4(x-2)$.

(4,0) **V.** Estude quanto à natureza (convergência simples, absoluta e divergência) as séries seguintes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^2+3}}{n(n^2+2)}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} \operatorname{sen}(\frac{\pi}{n})$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{2^n}$, d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}$.

Solução: a) Convergente (comparar com $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$). b) Convergente ($\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} \operatorname{sen}(\frac{\pi}{n}) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$). c) Convergente (usar o critério de D´Alembert). d) Divergente (termo geral não tem limite).

(2,0) **VI.** Seja $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^+)$ tal que $\varphi'(1) = 0, \varphi''(1) = -2$. Sendo $\psi(x) = \varphi(e^x)$, use a fórmula de MacLaurin para calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x^2}.$$

Justifique os cálculos que efectuar.

Solução: Tem-se, para algum ξ entre 0 e x,

$$\psi(x) = \psi(0) + \psi'(0)x + \frac{\psi''(\xi)}{2}x^2 = \psi(0) + \frac{1}{2}(e^\xi \varphi''(e^\xi) + e^{2\xi}\varphi'(e^\xi))x^2.$$

Pelo Teorema da continuidade da função composta, φ' e φ'' são contínuas em 1. Logo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x^2} = \lim_{\xi \to 0} \frac{1}{2}(e^\xi \varphi''(e^\xi) + e^{2\xi}\varphi'(e^\xi)) = -1.$$