Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste (Versão A) 4 de Janeiro de 2016

Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(2,5) **I.** Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(\operatorname{sen} x)}{\log x}$, b) $\lim_{x\to 1} (2-x)^{\dfrac{1}{\cos(\pi\, x/2)}}$.

(3,5) **II.** 1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $e^x \operatorname{sen}(5+3e^x)$, b) $\dfrac{2 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. Calcule

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\, dx\,.$$

(4,0) **III.** Calcule a área da região plana limitada pelas curvas

$$y=\pi+2\operatorname{arctg} x, \qquad y=-2\operatorname{arctg} x \qquad \text{e} \qquad x=0\ .$$

(4,0) **IV.** Seja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x)=\int_{-2}^{x}(x+2)\,g(t)\,dt\,.$$

a) Supondo que g é uma função positiva, mostre que $f(x)\geq 0$ para todo o $x\in\mathbb{R}$.

b) Justifique que f é diferenciável e calcule f'.

c) Supondo que g é uma função ímpar e $g(2)=1$, determine o polinómio de Taylor de ordem 1, no ponto $a=2$, da função f.

(4,0) **V.** Estude quanto à natureza (convergência simples, absoluta e divergência) as séries seguintes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n^2+3}}{n(n^2+2)}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{2^n}$, d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n^2}{n^2+1}$.

(2,0) **VI.** Seja $\varphi\in C^2(\mathbb{R}^+)$ tal que $\varphi'(1)=0, \varphi''(1)=-2$. Sendo $\psi(x)=\varphi(e^x)$, use a fórmula de MacLaurin, com resto de Lagrange, para calcular

$$\lim_{x\to 0}\frac{\psi(x)-\psi(0)}{x^2}\,.$$

Justifique os cálculos que efectuar.