
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(4,0) I. a) 1. Escreva os conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 6 \wedge |x - 3| \geq 2\}, \quad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{2x - 1}{x + 1} \leq 1\right\}.$$

na forma de intervalos ou reunião de intervalos.

2. Determine, se existirem em \mathbb{R} , $\sup A$, $\text{máx} A$, $\sup(A \setminus \mathbb{Q})$, $\inf(A \cap \mathbb{Z})$ e $\text{máx}(B \setminus \mathbb{Q})$.

b) Considere o conjunto $C =] - \pi, 0[\cup]0, e]$. Decida justificadamente se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

i. Qualquer sucessão de termos em C tem uma subsucessão convergente (em \mathbb{R}).

ii. Existe uma sucessão (u_n) de termos em C , convergente, tal que $\lim u_n \notin C$.

iii. Existe uma sucessão decrescente (v_n) , de termos em C , tal que a sucessão $((-1)^n v_n)$ é convergente.

(3,5) II. Considere uma sucessão de termo geral a_n definida por

$$\begin{cases} a_1 = 3, \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n^2 + 2}, \text{ se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Mostre, usando indução, que $a_n \in]0, 1]$ para $n \geq 2$.

b) Mostre que a sucessão é estritamente decrescente.

c) Justifique que a sucessão é convergente e determine o seu limite.

(4,5) III. Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + n(5(-1)^n + n^4)}{4n^5 - 1}, \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n^2} - \sqrt{n}, \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! - 3^n}{2 - 4^n}, \quad \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n! + 3}{n^2}}.$$

(5,0) IV. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} \operatorname{sen} x, & \text{se } x \geq 0, \\ \frac{x}{1 + x^2}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

a) Estude f quanto à continuidade.

b) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

c) Calcule a função derivada f' em **todos** os pontos onde esta estiver definida.

(3,0) V. a) Seja $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial de grau ímpar. Seja $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua verificando $|F(x)| \leq 2$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Mostre que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $P(\alpha) = F(\alpha)$.

b) Seja $\psi : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e diferenciável em $]1, 3[$, tal que

$$\psi\left(\frac{n^2 + 1}{n^2}\right) = \psi\left(\frac{n^2 + 2}{n^2}\right).$$

Calcule, supondo que existe, $\lim_{x \rightarrow 1} \psi'(x)$.