Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste (Versão A) 7 de Novembro de 2015

Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(4,0) I. a) 1. Escreva os conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \; x \geq 0 \;\wedge\; |x-3| \geq 2\}, \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{2x+1}{x+2} < 1\right\}.$$

na forma de intervalos ou reunião de intervalos.

Solução: $A = [0,1] \cup [5,+\infty[$ e $B =]-2,1[$.

2. Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, $\inf A$, $\min A$, $\min(A \setminus \mathbb{Q})$, $\sup(A \cap \mathbb{N})$ e $\sup(B \setminus \mathbb{Q})$.

Solução: $\inf A = \min A = 0$, $\min(A \setminus \mathbb{Q})$ e $\sup(A \cap \mathbb{N})$ não existem, $\sup(B \setminus \mathbb{Q}) = 1$.

b) Considere o conjunto $C = [-\pi, -e[\cup]e, 6[$. Decida justificadamente se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

i. Qualquer sucessão de termos em C tem uma subsucessão convergente (em $\mathbb{R}$).

Solução: V, Teorema de Bolzano-Weierstrass.

ii. Existe uma sucessão (u_n) de termos em C, convergente, tal que $\lim u_n \notin C$.

Solução: V, por ex. $u_n = e + 1/n$.

iii. Existe uma sucessão decrescente (v_n), de termos em C, tal que a sucessão $((-1)^n v_n))$ é convergente.

Solução: F, pois $v_n \to \ell$ (Teo. Suc. Monótonas e Limitadas) e $\ell \neq 0$, pelo que $((-1)^n v_n))$ tem dois sublimites distintos, ℓ e $-\ell$.

(3,5) II. Considere uma sucessão de termo geral a_n definida por

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n^2+1}, \text{ se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Mostre, usando indução, que $a_n \in]0,1]$ para $n \geq 2$.

Solução: $a_2 = 2/5 \in]0,1]$. Se $a_n \in]0,1]$ então $0 < a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n^2+1} \leq a_n \leq 1$.

b) Mostre que a sucessão é decrescente.

Solução: $a_{n+1} - a_n = a_n \left(\dfrac{1}{a_n^2+1} - 1\right) \leq 0\,,\; n \in \mathbb{N}_1$.

c) Justifique que a sucessão é convergente e determine o seu limite.

Solução: $a_n \to \ell$ (Teo. Suc. Monótonas e Limitadas) e $\ell = \dfrac{\ell}{\ell^2+1} \Rightarrow \ell = 0$.

(4,5) III. Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

a) $\lim \dfrac{2(-1)^n + 2n(3+n^2)}{4n^3+7}$, b) $\lim \sqrt{n} - \sqrt[4]{n^3}$, c) $\lim \dfrac{4^n + n!}{1-6^n}$, d) $\lim \sqrt[n]{\dfrac{1+2^n}{n^3}}$.

Solução: a) $1/2$, b) $-\infty$, c) $-\infty$, d) 2 .

(5,0) IV. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x^2}, & \text{se } x > 0, \\ -e^x \operatorname{sen} x, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

a) Estude f quanto à continuidade.

Solução: Teoremas da Continuidade e continuidade das funções racionais, exponencial e seno $\Rightarrow f$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. E é também contínua em $x = 0$ pois $\lim\limits_{x \to 0\pm} f(x) = 0 = f(0)$.

b) Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Solução: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.

c) Calcule a função derivada f' em todos os pontos onde esta estiver definida.

Solução: $f'_{\pm}(0) = \pm 1$, pelo que f não é diferenciável em $x = 0$. E

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, & \text{se } x > 0, \\ -e^x(\operatorname{sen} x + \cos x), & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

(3,0) V. a) Seja $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial de grau ímpar. Seja $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua verificando $|G(x)| \leq 1$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Mostre que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $P(\alpha) = G(\alpha)$.

Solução: Sendo G limitada e P ímpar, $\lim\limits_{x \to \pm\infty}(P(x) - G(x)) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x \to \pm\infty}(P(x) - G(x)) = \mp\infty$. Como $P - G$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$, o Teorema do Valor Intermédio permite concluir que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $P(\alpha) - G(\alpha) = 0$.

b) Seja $\phi : [0, 2] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e diferenciável em $]0, 2[$, tal que

$$\phi\left(\frac{n}{n^2+1}\right) = \phi\left(\frac{n+1}{n^2+1}\right) \quad .$$

Calcule, supondo que existe, $\lim_{x \to 0} \phi'(x)$.

Solução: Pelo Teorema de Rolle, para cada $n \in \mathbb{N}_1$, existe $\xi_n \in \left]\frac{n}{n^2+1}, \frac{n+1}{n^2+1}\right[$ tal que $\phi'(\xi_n) = 0$. Como $\xi_n \to 0$ (Teo. Suc. Enquadradas) e existe $\lim_{x \to 0} \phi'(x)$, tem-se $\lim \phi'(\xi_n) = \lim_{x \to 0} \phi'(x) = 0$.