Cálculo Diferencial e Integral I

Exame, 1º Teste, 2º Teste (Versão B) 25 de Janeiro de 2016

Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

Para realizar o exame responda a todas as questões. Para realizar o 1º Teste responda aos grupos **I** a **V**. Para realizar o 2º teste responda aos grupos **VI** a **XI**.

1º Teste

(4,0) I. 1. Considere os

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{\log(x-2)}{x-3} > 0 \right\}, \qquad B = \left\{ x \in [-1,1] : 0 < \arccos x \leq \frac{\pi}{6} \right\}.$$

a) Exprima A e B na forma de intervalos ou reunião finita de intervalos.

b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, $\inf A$, $\min A$, $\max(\mathbb{R} \setminus A)$, $\sup(A \cap \mathbb{N})$ e $\sup(B \cap \mathbb{Q})$.

2. Considere o conjunto $C = [-10, 1[\cup [\pi, +\infty[$. Decida justificadamente se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

i. Qualquer sucessão de termos em C, decrescente, é convergente (em $\mathbb{R}$).

ii. Qualquer sucessão de termos em C tem um sublimite (em $\mathbb{R}$).

iii. Se (u_n) é uma sucessão crescente de termos em C então $\lim u_n = 1$ ou $\lim u_n = +\infty$.

(3,5) II. Considere uma sucessão de termo geral a_n definida por

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2}\left(1 - e^{-a_n^2}\right), \text{ se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Mostre, usando indução, que $a_n \in]0, 2]$ para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Mostre que a sucessão é decrescente.

c) Justifique que a sucessão é convergente e determine o seu limite.

(3,5) III. Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

a) $\lim \dfrac{\operatorname{arcsen}(1/n)}{\cos(\pi/n)}$, b) $\lim \dfrac{5n^n + 3n!}{4^n + n^n}$, c) $\lim \sqrt[n]{(3^n + 1)\operatorname{arctg} n}$.

(6,0) IV. Considere a função $g :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} -x^2\, e^{1-x^2}, & \text{se } x \leq 0, \\ -\log\sqrt{1-x^2}, & \text{se } 0 < x < 1. \end{cases}$$

a) Estude g quanto à continuidade.

b) Calcule $\lim_{x \to 1^-} g(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} g(x)$.

c) Determine a função derivada g'.

d) Indique os intervalos de monotonia de g e os pontos em que g tem máximos e mínimos locais.

(3,0) V. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Decida se $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{1 + f^4(x)}$$

possui ou não máximo e mínimo.

2º Teste

(3,5) VI. Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

$$\text{a) } \lim_{x\to 1} \frac{1-\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}x)}{\arccos x}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0} (\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}), \qquad \text{c) } \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt}{1-\cos x}.$$

(2,5) VII. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a) } \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}, \qquad \text{b) } \log(x+2)^{1/2}.$$

(2,5) VIII. Calcule

$$\int_0^2 \frac{1}{(t+2)\sqrt{t+1}}\,dt.$$

(3,5) IX. Determine uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, diferenciável e não nula, tal que

$$f^2(t) = \int_{-\pi/2}^{t} f(x)\frac{\cos x}{2+\operatorname{sen} x}\,dx.$$

(5,0) X. 1. Estude quanto à natureza (convergência simples, absoluta e divergência) as séries seguintes:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^3\sqrt{n+5}}, \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2+1/n}}{5^n}, \qquad \text{c) } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(3n)}{n^2}.$$

2. Determine para que valores de $x\in\mathbb{R}$ a seguinte série converge absolutamente, simplesmente ou diverge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{3^n}(x-3)^n.$$

(3,0) XI. 1. Mostre que se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é uma série de termos positivos, convergente, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ é uma série convergente. Será o resultado verdadeiro se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for uma série de termos sem sinal fixo? Justifique.

2. Sejam I um intervalo aberto, $a\in I$ e $\psi : I\to\mathbb{R}$ uma função 2-vezes diferenciável, tal que $\psi''(x)<0$, para qualquer $x\in I$. Seja ainda

$$h(x) = \psi(a) + \psi'(a)(x-a).$$

Mostre que $\psi(x) < h(x)$ para qualquer $x \in I\setminus\{a\}$.