Cálculo Diferencial e Integral I

Exame, 1º Teste, 2º Teste (Versão A) 25 de Janeiro de 2016

Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

Para realizar o exame responda a todas as questões. Para realizar o 1º Teste responda aos grupos **I** a **V**. Para realizar o 2º teste responda aos grupos **VI** a **XI**.

1º Teste

(4,0) I. 1. Considere os

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{\log(x-1)}{x-2} > 0\right\}, \qquad B = \left\{x \in [-1,1] : 0 < \operatorname{arcsen} x \leq \frac{\pi}{3}\right\}.$$

a) Exprima A e B na forma de intervalos ou reunião finita de intervalos.

b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, $\inf A$, $\min A$, $\max(\mathbb{R} \setminus A)$, $\sup(A \cap \mathbb{N})$ e $\sup(B \cap \mathbb{Q})$.

2. Considere o conjunto $C =]-\infty, 1] \cup]\pi, 10]$. Decida justificadamente se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

i. Se (u_n) é uma sucessão de termos em C, decrescente, então (u_n) é divergente (em $\mathbb{R}$).

ii. Qualquer sucessão de termos em C tem um sublimite em $\mathbb{R}$.

iii. Se (u_n) é uma sucessão crescente de termos em C então $\lim u_n = 1$ ou $\lim u_n = 10$.

(3,5) II. Considere uma sucessão de termo geral a_n definida por

$$\begin{cases} a_1 = 6, \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3}\left(1 - e^{-a_n^2}\right), & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Mostre, usando indução, que $a_n \in]0, 6]$ para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Mostre que a sucessão é decrescente.

c) Justifique que a sucessão é convergente e determine o seu limite.

(3,5) III. Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

$$\text{a) } \lim \frac{\arccos(1/n)}{\cos(\pi/n)}, \qquad \text{b) } \lim \frac{2n! + 3^n}{n^{50} + n!}, \qquad \text{c) } \lim \sqrt[n]{\frac{\operatorname{arctg} n}{1 + e^n}}.$$

(6,0) IV. Considere a função $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \log\sqrt{1 - x^2}, & \text{se } -1 < x \leq 0, \\ x^2\, e^{1 - x^2}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

a) Estude f quanto à continuidade.

b) Calcule $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

c) Determine a função derivada f'.

d) Indique os intervalos de monotonia de f e os pontos em que f tem máximos e mínimos locais.

(3,0) V. Sejam $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\lim_{x \to +\infty} \psi(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} \psi(x) = -\infty$. Decida se $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$G(x) = \frac{\psi(x)}{1 + \psi^2(x)}$$

possui ou não máximo e mínimo.

2º Teste

(3,5) VI. Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

$$\text{a)} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{arcsen} x}, \qquad \text{b)} \lim_{x\to 0} x(\log x)^2, \qquad \text{c)} \lim_{x\to 0} \frac{2\int_0^x (1-e^{t^2})\, dt}{x^2}.$$

(2,5) VII. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a)} \frac{\cos(\log x)}{x}, \qquad \text{b)} \log(1+x)^2.$$

(2,5) VIII. Calcule

$$\int_2^7 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+2}}\, dx.$$

(3,5) IX. Determine uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diferenciável e não nula, tal que

$$f^3(x) = \int_{\pi/2}^{x} f^2(t) \frac{\cos t}{2-\operatorname{sen} t}\, dt.$$

(5,0) X. 1. Estude quanto à natureza (convergência simples, absoluta e divergência) as séries seguintes:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+2}}{n^2\sqrt{n+9}}, \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{e^n}, \qquad \text{c)} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{sen}(2n)}{n^3}.$$

2. Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a seguinte série converge absolutamente, simplesmente ou diverge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2^n} (x-2)^n.$$

(3,0) XI. 1. Mostre que se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ são séries de termos positivos, convergentes, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, b_n$ é uma série convergente. Será o resultado verdadeiro se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ forem séries de termos sem sinal fixo? Justifique.

2. Sejam I um intervalo aberto, $a \in I$ e $\varphi : I \to \mathbb{R}$ uma função 2-vezes diferenciável, tal que $\varphi''(x) > 0$, para qualquer $x \in I$. Seja ainda

$$g(x) = \varphi'(a)(x-a) + \varphi(a).$$

Mostre que $\varphi(x) > g(x)$ para qualquer $x \in I \setminus \{a\}$.