Cálculo Diferencial e Integral I

2.º Teste (Versão B) 8 de Junho de 2015

LEAN, MEAer, MEMec, MEBiol, MEAmbi

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(3,0) **I.** Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x$, b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x \cos t^2\, dt}{x^3}$.

Resolução:

a) Como $(\operatorname{sen} x)^x = e^{x \log(\operatorname{sen} x)}$ comecemos por considerar, usando a regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to 0^+} x\log(\operatorname{sen} x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\operatorname{sen} x)}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x/\operatorname{sen} x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x}\, x\cos x = 0\,.$$

pelo que

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x = e^0 = 1\,.$$

b) Usando a regra de Cauchy e o Teorema Fundamental da Análise,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \cos t^2\, dt}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x^2}{3x^2} = +\infty\,.$$

(3,5) **II.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $\dfrac{e^x}{1+4e^{2x}}$, b) $\dfrac{x^3+2x}{x^4+4x^2}$, c) $\log(1+x^2)$.

Resolução:

a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+4e^{2x}}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^x}{1+(2e^x)^2}\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2e^x)\,.$

b) $\displaystyle\int \frac{x^3+2x}{x^4+4x^2}\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3+8x}{x^4+4x^2}\, dx = \frac{1}{4}\log(x^4+4x^2)\,.$

c) Primitivando por partes,

$$\int \log(1+x^2)\, dx = x\log(1+x^2) - 2\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx =$$
$$= x\log(1+x^2) - 2\int (1 - \frac{1}{1+x^2})dx = x\log(1+x^2) - 2x + 2\operatorname{arctg} x\,.$$

(3,0) **III.** Calcule o integral

$$\int_0^{1/3} \frac{1}{1+e^{3x}}\, dx\,.$$

Resolução: Usando a substituição $t = e^{3x}$, vem

$$\int_0^{1/3} \frac{1}{1+e^{3x}}\, dx = \frac{1}{3}\int_1^e \frac{1}{t(t+1)}\, dt = \frac{1}{3}\int_1^e \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt =$$
$$= \frac{1}{3}\left[\log t\right]_1^e - \frac{1}{3}\left[\log(t+1)\right]_1^e = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\log\frac{2}{e+1}\,.$$

(3,5) **IV.** Considere a função $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$\psi(x) = \int_0^{\cos x} \log(1+t^2)\, dt\,.$$

Justifique que ψ é diferenciável e calcule ψ'. Determine ainda os valores $x \in [0,\pi[$ tais que $\psi'(x) = 0$ e mostre que um desses valores é um ponto de máximo local de ψ.

Resolução: A função ψ é diferenciável, pois trata-se da composição da função diferenciável cos com o integral indefinido, com origem no ponto zero, de uma função contínua, que é também diferenciável, pelo Teorema Fundamental da Análise. Tem-se, usando também o teorema da derivada da função composta,

$$\psi'(x) = -\operatorname{sen} x \log(1+\cos^2 x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Ora, para $x \in [0,\pi[,\ \psi'(x) = 0$ sse $x = 0 \vee x = \frac{\pi}{2}$. Além disso,

$$\psi''(x) = -\cos x \log(1+\cos^2 x) + \frac{2\operatorname{sen}^2 x \cos x}{1+\cos^2 x}\,,$$

pelo que $\psi''(0) = -\log 2 < 0$ e $\psi''(\frac{\pi}{2}) = 0$. Logo 0 é um ponto de máximo local de ψ.

Nota: Alternativamente, bastaria estudar o sinal de $\psi'(x)$ em vizinhanças de $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$.

(4,5) **V.** a) Estude quanto à natureza as séries seguintes, e calcule a soma de uma delas:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3+\sqrt{n}}{n+2}\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{2^n}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

b) Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a seguinte série de potências converge absolutamente, simplesmente ou diverge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3}{n(n+1)}\, x^n\,.$$

Resolução:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3+\sqrt{n}}{n+2}$ é uma série divergente, por comparação com a série de Dirichlet divergente $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$. De facto,

$$\lim \frac{3+\sqrt{n}}{n+2}\sqrt{n} = \lim \frac{3/\sqrt{n}+1}{1+2/n} = 1 \neq 0\,.$$

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^3}{2^n}$ é convergente, como resulta do critério de D´Alembert,

$$\lim \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n^3} = \frac{1}{2}\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{2} < 1\,.$$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $3/4$, com módulo inferior a 1 e portanto convergente, com soma dada por

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{1-3/4} = 4\,.$$

b) Trata-se de uma série de potências, da forma $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ com $a_n = (-1)^n \dfrac{3}{n(n+1)}$. O seu raio de convergência é dado por

$$r = \lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = \lim(1+2/n) = 1\,.$$

Para $x=-1$ tem-se $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3}{n(n+1)}$, que é uma série convergente, pois

$$0 < \frac{3}{n(n+1)} < \frac{3}{n^2}\,,$$

e a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ é convergente. Para $x=1$, a série é absolutamente convergente, pois a série dos módulos coincide com a anterior. Logo, a série de potências é absolutamente convergente para qualquer $x \in [-1,1]$ e divergente em $\mathbb{R} \setminus [-1,1]$.

(2,5) **VI.** Sejam $g \in C(\mathbb{R})$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \int_0^{x-1} g(t)\,dt\,.$$

Prove que se $\lim_{x\to+\infty} g(x) = b \in \mathbb{R}$ então também $\lim_{x\to+\infty} [f(x+2) - f(x+1)] = b$.

Resolução: Tem-se

$$f(x+2) - f(x+1) = \int_0^{x+1} g(t)\,dt - \int_0^{x} g(t)\,dt = \int_x^{x+1} g(t)\,dt\,.$$

Como $g \in C(\mathbb{R})$, pelo teorema da média, existe $c \in [x, x+1]$ tal que

$$\int_x^{x+1} g(t)\,dt = g(c)\,.$$

Como $\lim_{x\to+\infty} g(x) = b$, dado $\delta > 0$, existe uma constante $k > 0$ tal que, para qualquer $x > k$ se tem $g(x) \in V_\delta(b)$. Então, para $x > k$, como $c \in [x, x+1]$, também $f(x+2) - f(x+1) = g(c) \in V_\delta(b)$. Logo

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x+2) - f(x+1)] = b\,.$$

Nota: Alternativamente, bastaria notar que $c = c(x)$ satisfaz $x \le c(x) \le x+1$, donde $\lim_{x\to+\infty} c(x) = +\infty$ e consequentemente $\lim_{x\to+\infty} g(c(x)) = b$.