

## Cálculo Diferencial e Integral I

2.º Teste (Versão B) 8 de Junho de 2015

**LEAN, MEAer, MEMec, MEBiol, MEAmbi**

---

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

---

(3,0) **I.** Calcule, se existirem em  $\overline{\mathbb{R}}$ , os seguintes limites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x^3}.$$

(3,5) **II.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a) } \frac{e^x}{1 + 4e^{2x}}, \quad \text{b) } \frac{x^3 + 2x}{x^4 + 4x^2}, \quad \text{c) } \log(1 + x^2).$$

(3,0) **III.** Calcule o integral

$$\int_0^{1/3} \frac{1}{1 + e^{3x}} dx.$$

(3,5) **IV.** Considere a função  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\psi(x) = \int_0^{\cos x} \log(1 + t^2) dt.$$

Justifique que  $\psi$  é diferenciável e calcule  $\psi'$ . Determine ainda os valores  $x \in [0, \pi[$  tais que  $\psi'(x) = 0$  e mostre que um desses valores é um ponto de máximo local de  $\psi$ .

(4,5) **V.** a) Estude quanto à natureza as séries seguintes, e calcule a soma de uma delas:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3 + \sqrt{n}}{n + 2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{2^n}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

b) Determine para que valores de  $x \in \mathbb{R}$  a seguinte série de potências converge absolutamente, simplesmente ou diverge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3}{n(n+1)} x^n.$$

(2,5) **VI.** Sejam  $g \in C(\mathbb{R})$  e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por

$$f(x) = \int_0^{x-1} g(t) dt.$$

Prove que se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = b \in \mathbb{R}$  então também  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+2) - f(x+1)] = b$ .