Cálculo Diferencial e Integral I

2.º Teste (Versão A)   8 de Junho de 2015

LEAN, MEAer, MEMec, MEBiol, MEAmbi

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(3,0) **I.** Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen} t^3\, dt}{x^4}.$$

Resolução:

a) Como $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{\log(\cos x)}{x^2}}$ comecemos por considerar, usando a regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\cos x)}{x^2} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \frac{1}{2\cos x} = -\frac{1}{2}.$$

pelo que

$$\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-1/2}.$$

b) Usando a regra de Cauchy e o Teorema Fundamental da Análise,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen} t^3\, dt}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^3}{4x^3} = \frac{1}{4}.$$

(3,5) **II.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a)}\ \frac{\operatorname{sen} x}{3+2\cos x}, \qquad \text{b)}\ \frac{3e^x}{1+e^{2x}}, \qquad \text{c)}\ x \operatorname{arctg} x.$$

Resolução:

a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{3+2\cos x}\, dx = -\frac{1}{2}\log(3+2\cos x)\,.$

b) $\displaystyle\int \frac{3e^x}{1+e^{2x}}\, dx = 3\int \frac{e^x}{1+(e^x)^2}\, dx = 3 \operatorname{arctg} e^x\,.$

c) Primitivando por partes,

$$\int x \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int (1-\frac{1}{1+x^2})dx = \frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x\,.$$

(3,0) **III.** Calcule o integral

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1+e^{2x}}\, dx\,.$$

Resolução: Usando a substituição $t = e^{2x}$, vem

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1+e^{2x}}\, dx = \frac{1}{2}\int_1^e \frac{1}{t(t+1)}\, dt = \frac{1}{2}\int_1^e \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log t\right]_1^e - \frac{1}{2}\left[\log(t+1)\right]_1^e = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log\frac{2}{e+1}\,.$$

(3,5) **IV.** Considere a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$\varphi(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \log(1+t^2)\, dt\,.$$

Justifique que φ é diferenciável e calcule φ'. Determine ainda os valores $x \in [0, \pi[$ tais que $\varphi'(x) = 0$ e mostre que um desses valores é um ponto de máximo local de φ.

Resolução: A função φ é diferenciável, pois trata-se da composição da função diferenciável sen com o integral indefinido, com origem no ponto zero, de uma função contínua, que é também diferenciável, pelo Teorema Fundamental da Análise. Tem-se, usando também o teorema da derivada da função composta,

$$\varphi'(x) = \cos x \log(1 + \operatorname{sen}^2 x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Ora, para $x \in [0, \pi[$, $\varphi'(x) = 0$ sse $x = 0 \vee x = \frac{\pi}{2}$. Além disso,

$$\varphi''(x) = -\operatorname{sen} x \log(1 + \operatorname{sen}^2 x) + \frac{2 \operatorname{sen} x \cos^2 x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}\,,$$

pelo que $\varphi''(0) = 0$ e $\varphi''(\frac{\pi}{2}) = -\log 2 < 0$. Logo $\frac{\pi}{2}$ é um ponto de máximo local de φ.

Nota: Alternativamente, bastaria estudar o sinal de $\varphi'(x)$ em vizinhanças de $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$.

(4,5) **V.** a) Estude quanto à natureza as séries seguintes, e calcule a soma de uma delas:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{2n+n^2}\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n.$$

b) Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a seguinte série de potências converge absolutamente, simplesmente ou diverge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \, \frac{2}{n(n+2)} \, x^n\,.$$

Resolução:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{2n+n^2}$ é uma série convergente, por comparação com a série de Dirichlet convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$. De facto,

$$\lim \frac{\sqrt{n}+1}{2n+n^2} n^{3/2} = \lim \frac{1 + 1/n^2}{2/n^2 + 1} = 1 \neq 0\,.$$

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^2}{3^n}$ é convergente, como resulta do critério de D´Alembert,

$$\lim \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \frac{3^n}{n^2} = \frac{1}{3} \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{3} < 1\,.$$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $2/5$, com módulo inferior a 1 e portanto convergente, com soma dada por

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{1}{1 - 2/5} = \frac{5}{3}\,.$$

b) Trata-se de uma série de potências, da forma $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ com $a_n = (-1)^n \dfrac{2}{n(n+2)}$. O seu raio de convergência é dado por

$$r = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \frac{(n+1)(n+3)}{n(n+2)} = \lim \frac{(1+1/n)(1+3/n)}{1+2/n} = 1\,.$$

Para $x=-1$ tem-se $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2}{n(n+2)}$, que é uma série convergente, pois

$$0 < \frac{2}{n(n+2)} < \frac{2}{n^2}\,,$$

e a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ é convergente. Para $x=1$, a série é absolutamente convergente, pois a série dos módulos coincide com a anterior. Logo, a série de potências é absolutamente convergente para qualquer $x \in [-1,1]$ e divergente em $\mathbb{R} \setminus [-1,1]$.

(2,5) **VI.** Sejam $f \in C(\mathbb{R})$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$g(x) = \int_0^{x+1} f(t)\,dt\,.$$

Prove que se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$ então também $\lim\limits_{x\to+\infty} [g(x) - g(x-1)] = a$.

Resolução: Tem-se

$$g(x) - g(x-1) = \int_0^{x+1} f(t)\,dt - \int_0^{x} f(t)\,dt = \int_x^{x+1} f(t)\,dt\,.$$

Como $f \in C(\mathbb{R})$, pelo teorema da média, existe $c \in [x, x+1]$ tal que

$$\int_x^{x+1} f(t)\,dt = f(c)\,.$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$, dado $\delta > 0$, existe uma constante $k > 0$ tal que, para qualquer $x > k$ se tem $f(x) \in V_\delta(a)$. Então, para $x > k$, como $c \in [x, x+1]$, também $g(x) - g(x-1) = f(c) \in V_\delta(a)$. Logo

$$\lim_{x\to+\infty} [g(x) - g(x-1)] = a\,.$$

Nota: Alternativamente, bastaria notar que $c = c(x)$ satisfaz $x \le c(x) \le x+1$, donde $\lim\limits_{x\to+\infty} c(x) = +\infty$ e consequentemente $\lim\limits_{x\to+\infty} f(c(x)) = a$.