TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I

2.º Teste (Versão A) 8 de Junho de 2015

LEAN, MEAer, MEMec, MEBiol, MEAmbi

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(3,0) **I.** Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen} t^3\, dt}{x^4}.$$

(3,5) **II.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a) } \frac{\operatorname{sen} x}{3+2\cos x}, \qquad \text{b) } \frac{3e^x}{1+e^{2x}}, \qquad \text{c) } x \operatorname{arctg} x.$$

(3,0) **III.** Calcule o integral

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1+e^{2x}}\, dx\,.$$

(3,5) **IV.** Considere a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$\varphi(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \log(1+t^2)\, dt\,.$$

Justifique que φ é diferenciável e calcule φ'. Determine ainda os valores $x \in [0, \pi[$ tais que $\varphi'(x) = 0$ e mostre que um desses valores é um ponto de máximo local de φ.

(4,5) **V.** a) Estude quanto à natureza as séries seguintes, e calcule a soma de uma delas:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{2n+n^2}\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n.$$

b) Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a seguinte série de potências converge absolutamente, simplesmente ou diverge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2}{n(n+2)}\, x^n\,.$$

(2,5) **VI.** Sejam $f \in C(\mathbb{R})$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$g(x) = \int_0^{x+1} f(t)\, dt\,.$$

Prove que se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$ então também $\lim_{x\to+\infty} [g(x) - g(x-1)] = a$.