TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I

1.º Teste (Versão B) 11 de Abril de 2015

LEAN, MEAer, MEMec, MEBiol, MEAmbi

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(5,0) **I.** Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x : \frac{x^2 - 4}{|x+2|} \geq 0 \right\}, \qquad B = [-4, 5]\,, \qquad C = (A \cap B).$$

a) Identifique o conjunto A e mostre que $C = [-4, -2[\cup [2, 5]$.

Resolução:

$$\frac{x^2 - 4}{|x+2|} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \geq 4 \wedge x \neq -2 \quad \Leftrightarrow \quad x < -2 \quad \vee x \geq 2,$$

pelo que $A =]-\infty, -2[\cup [2, +\infty[$. Logo $C = [-4, -2[\cup [2, 5]$.

b) Determine, se existirem, $\inf C$, $\sup C$, $\min C$, $\inf\,(C \setminus \mathbb{Q})$ e $\max\,(C \setminus \mathbb{Q})$.

Resolução: $\inf C$=$\min C = -4$, $\sup C = 5$, $\inf\,(C \setminus \mathbb{Q}) = -4$ e não existe $\max\,(C \setminus \mathbb{Q})$.

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Qualquer sucessão decrescente de termos em C é convergente (em $\mathbb{R}$).
(ii) Qualquer sucessão crescente de termos em C tem limite em C.
(iii) Existe uma sucessão (v_n) de termos em C tal que $\lim v_n = 1$.

Resolução:
(i) Proposição verdadeira: sendo a sucessão decrescente e minorada, converge, pelo Teorema das sucessões monótonas e limitadas.
(ii) Proposição falsa: por ex., $u_n = -2 - \frac{1}{n}$.
(iii) Proposição falsa: se (u_n) é uma sucessão de termos em C, convergente, então $\lim u_n \in [-4, -2] \cup [2, 5]$.

d) Seja (b_n) uma sucessão decrescente de termos em B. Indique o supremo e o ínfimo do conjunto dos termos da sucessão (b_n).

Resolução:

$$\inf\{b_n : n \in \mathbb{N}_1\} = \lim b_n \qquad \text{e} \qquad \sup\{b_n : n \in \mathbb{N}_1\} = b_1.$$

(2,0) **II.** Por indução, mostre que, para qualquer número natural $n \geq 1$,

$$(n+2)\,! \;\geq\; 2^{2n}.$$

Resolução:
Como $3! = 6 \geq 2^2 = 4$, a condição é verdadeira para $n = 1$. Admitamos agora que a condição é verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 1$. Provemo-la para $n + 1$. Tem-se

$$(n+3)\,! = (n+3)(n+2)\,! \geq (n+3)\,2^{2n} \geq 4.2^{2n} = 2^{2n+2}\;,$$

e portanto a condição é verdadeira para qualquer $n \geq 1$.

(4,5) **III.** Calcule, ou mostre que não existem (em $\overline{\mathbb{R}}$) , os seguintes limites de sucessões:

a) $\lim \dfrac{n-3n^3+1}{n^2+5}$. b) $\lim \dfrac{1+(-1)^n n}{n^3+4}$. c) $\lim \dfrac{n!+n^5-1}{n^n-7}$. d) $\lim \sqrt[n]{3^n+2}$.

Resolução:

a) $\lim \dfrac{n-3n^3+1}{n^2+5} = \lim \dfrac{1/n^2-3+1/n^3}{1/n+5/n^3} = -\infty.$

b) $\lim \dfrac{1+(-1)^n n}{n^3+4} = \lim \dfrac{1/n^3+(-1)^n/n^2}{1+4/n^3} = \dfrac{0}{1} = 0.$

c) $\lim \dfrac{n!+n^5-1}{n^n-7} = \lim \dfrac{n!/n^n+n^5/n^n-1/n^n}{1-7/n^n} = \dfrac{0}{1} = 0.$

d) Queremos calcular $\lim \sqrt[n]{a_n}$ com $a_n = 3^n+2$. Ora, como

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}+2}{3^n+2} = \frac{1+2/3^{n+1}}{1/3+2/3^{n+1}} \to 3\,,$$

vem $\lim \sqrt[n]{a_n} = 3$.

(6,0) **IV.** Considere a função $g : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} \log \dfrac{1}{1-x^3}, & \text{se } x<0,\\ -e^{-\frac{1}{x}}, & \text{se } x>0. \end{cases}$$

a) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

Resolução:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \log\frac{1}{1-x^3} = -\infty \ \text{ e } \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}} = -1 \ .$$

b) Justifique que g é contínua em todo o seu domínio e mostre que é prolongável por continuidade ao ponto 0.

Resolução: O domínio é a união de dois intervalos disjuntos, e em cada um deles g é a composta de funções contínuas, sendo portanto contínua. Além disso, tem-se

$$\lim_{x\to0-} g(x) = \lim_{x\to0-} \log\frac{1}{1-x^3} = 0 \ \text{ e } \lim_{x\to0+} g(x) = -\lim_{x\to0+} e^{-\frac{1}{x}} = 0\ ,$$

pelo que $\lim_{x\to0} g(x) = 0$, o que mostra que g é prolongável por continuidade ao ponto 0, assumindo neste ponto o valor zero.

c) Calcule a função derivada g' e determine os intervalos de monotonia da função g.

Resolução: Tem-se $g' : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, dada por

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{1-x^3}, & \text{se } x<0,\\ -\dfrac{1}{x^2}\,e^{\frac{1}{x}}, & \text{se } x>0. \end{cases}$$

Ora $g'(x)>0$ para $x<0$, e portanto g é estritamente crescente em $]-\infty,0[$. Por outro lado, $g'(x)<0$ para $x>0$, pelo que g é estritamente decrescente em $]0,+\infty[$.

d) Sendo $\tilde{g}$ o prolongamento contínuo de g ao ponto zero, justifique que $\tilde{g}$ tem máximo e mínimo em qualquer intervalo da forma $[-c,c]$ com $c>0$. Indique, justificando, o valor de $\max\limits_{x\in[-c,c]} \tilde{g}(x)$.

Resolução:

Pelo Teorema de Weierstrass, como $\tilde{g}$ é contínua em $[-a,a]$, tem máximo e mínimo neste intervalo. A função é crescente em $[-a,0]$ e decrescente em $[0,a]$, pelo que $\max\limits_{x\in[-a,a]} \tilde{g}(x) = \tilde{g}(0) = 0$.

(2,5) **V.** Seja ψ uma função real definida e contínua em $[2, +\infty[$, tal que

$$\psi(2) = -2 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} \psi(x) = 0.$$

Prove que existe mínimo da função ψ.

Resolução:
Uma vez que $\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = 0$, resulta da definição de limite que existe $a > 2$ tal que, para qualquer $x > a$, se tem $\psi(x) \in V_2(0)$ e portanto $\varphi(x) > -2$ se $x > a$. No intervalo $[2, a]$ a função é contínua, pelo que tem mínimo nesse intervalo (Teorema de Weierstrass). Como $\psi(2) = -2$,

$$\min_{x\in[2,a]} \psi(x) \leq -2.$$

Logo, tendo-se $\psi(x) > -2$ para qualquer $x > a$,

$$\min \psi = \min_{x\in[2,+\infty[} \psi(x) = \min_{x\in[2,a]} \psi(x).$$