Cálculo Diferencial e Integral I

1.º Teste (Versão B) 11 de Abril de 2015

LEAN, MEAer, MEMec, MEBiol, MEAmbi

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(5,0) **I.** Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x : \frac{x^2 - 4}{|x+2|} \geq 0 \right\}, \qquad B = [-4, 5], \qquad C = (A \cap B).$$

a) Identifique o conjunto A e mostre que $C = [-4, -2[\cup [2, 5]$.

b) Determine, se existirem, $\inf C$, $\sup C$, $\min C$, $\inf (C \setminus \mathbb{Q})$ e $\max (C \setminus \mathbb{Q})$.

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Qualquer sucessão decrescente de termos em C é convergente (em $\mathbb{R}$).

(ii) Qualquer sucessão crescente de termos em C tem limite em C.

(iii) Existe uma sucessão (v_n) de termos em C tal que $\lim v_n = 1$.

d) Seja (b_n) uma sucessão decrescente de termos em B. Indique o supremo e o ínfimo do conjunto dos termos da sucessão (b_n).

(2,0) **II.** Por indução, mostre que, para qualquer número natural $n \geq 1$,

$$(n+2)! \geq 2^{2n}.$$

(4,5) **III.** Calcule, ou mostre que não existem (em $\overline{\mathbb{R}}$) , os seguintes limites de sucessões:

a) $\lim \dfrac{n - 3n^3 + 1}{n^2 + 5}$. b) $\lim \dfrac{1 + (-1)^n n}{n^3 + 4}$. c) $\lim \dfrac{n! + n^5 - 1}{n^n - 7}$. d) $\lim \sqrt[n]{3^n + 2}$.

(6,0) **IV.** Considere a função $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} \log \dfrac{1}{1 - x^3}, & \text{se } x < 0, \\ -e^{-\frac{1}{x}}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

a) Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

b) Justifique que g é contínua em todo o seu domínio e mostre que é prolongável por continuidade ao ponto 0.

c) Calcule a função derivada g' e determine os intervalos de monotonia da função g.

d) Sendo $\tilde{g}$ o prolongamento contínuo de g ao ponto zero, justifique que $\tilde{g}$ tem máximo e mínimo em qualquer intervalo da forma $[-c, c]$ com $c > 0$. Indique, justificando, o valor de $\max\limits_{x \in [-c,c]} \tilde{g}(x)$.

(2,5) **V.** Seja ψ uma função real definida e contínua em $[2, +\infty[$, tal que

$$\psi(2) = -2 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} \psi(x) = 0.$$

Prove que existe mínimo da função ψ.