Cálculo Diferencial e Integral I

1.º Teste (Versão A) 11 de Abril de 2015

LEAN, MEAer, MEMec, MEBiol, MEAmbi

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(5,0) **I.** Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x : \frac{x^2-1}{|x-1|} \geq 0 \right\}, \qquad B = [-2,3]\,, \qquad C = (A \cap B).$$

a) Identifique o conjunto A e mostre que $C = [-2,-1] \cup]1,3]$.

Resolução:

$$\frac{x^2-1}{|x-1|} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 \geq 1 \wedge x \neq 1 \;\Leftrightarrow\; x \leq -1 \;\vee\; x > 1,$$

pelo que $A =]-\infty,-1] \cup]1,+\infty[$. Logo $C = [-2,-1] \cup]1,3]$.

b) Determine, se existirem, $\inf C$, $\sup C$, $\max C$, $\sup\,(C \setminus \mathbb{Q})$ e $\min\,(C \setminus \mathbb{Q})$.

Resolução: $\inf C = -2$, $\sup C =\max C = 3$, $\sup\,(C \setminus \mathbb{Q}) = 3$ e não existe $\min\,(C \setminus \mathbb{Q})$.

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Qualquer sucessão crescente de termos em C é convergente (em $\mathbb{R}$).

(ii) Qualquer sucessão decrescente de termos em C tem limite em C.

(iii) Existe uma sucessão (u_n) de termos em C tal que $\lim u_n = 0$.

Resolução:
(i) Proposição verdadeira: sendo a sucessão crescente e majorada, converge (em $\mathbb{R}$), pelo Teorema das sucessões monótonas e limitadas.
(ii) Proposição falsa: por ex., $u_n = 1 + \frac{1}{n}$.
(iii) Proposição falsa: se (u_n) é uma sucessão de termos em C, convergente, então $\lim u_n \in [-2,-1] \cup [1,3]$.

d) Seja (b_n) uma sucessão crescente de termos em B. Indique o supremo e o ínfimo do conjunto dos termos da sucessão (b_n).

Resolução:

$$\inf\{b_n : n \in \mathbb{N}_1\} = b_1 \qquad \text{e} \qquad \sup\{b_n : n \in \mathbb{N}_1\} = \lim b_n.$$

(2,0) **II.** Por indução, mostre que, para qualquer número natural $n \geq 2$,

$$(n+1)\,! \;\geq\; 2^{2(n-1)}.$$

Resolução:
Como $3! = 6 \geq 2^2 = 4$, a condição é verdadeira para $n = 2$. Admitamos agora que a condição é verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$. Provemo-la para $n+1$. Tem-se

$$(n+2)! = (n+2)(n+1)! \geq (n+2)\,2^{2n-2} \geq 4.2^{2n-2} = 2^{2n}\;,$$

e portanto a condição é verdadeira para qualquer $n \geq 2$.

(4,5) **III.** Calcule, ou mostre que não existem (em $\overline{\mathbb{R}}$), os seguintes limites de sucessões:

a) $\lim \dfrac{n^2+2n-1}{n^3+3}$. b) $\lim \dfrac{6^n+n^2+2}{n!+3}$. c) $\lim \dfrac{(-1)^n n^2+1}{2n^2+5}$. d) $\lim \sqrt[n]{\dfrac{n-3}{n^2+n-1}}$.

Resolução:

a) $\lim \dfrac{n^2+2n-1}{n^3+3} = \lim \dfrac{1/n+2/n^2-1/n^3}{1+3/n^3} = \dfrac{0}{1} = 0.$

b) $\lim \dfrac{6^n+n^2+2}{n!+3} = \lim \dfrac{6^n/n!+n^2/n!+2/n!}{1+3/n!} = \dfrac{0}{1} = 0.$

c) O limite não existe em $\overline{\mathbb{R}}$ pois, sendo $u_n = \dfrac{(-1)^n n^2+1}{2n^2+5}$,

$$u_{2n} = \frac{4n^2+1}{8n^2+5} = \frac{4+1/n^2}{8+5/n^2} \to \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad u_{2n-1} = \frac{-(2n-1)^2+1}{2(2n-1)^2+5} = \frac{-1+1/(2n-1)^2}{2+5/(2n-1)^2} \to -\frac{1}{2}.$$

d) Queremos calcular $\lim \sqrt[n]{a_n}$ com $a_n = \dfrac{n-3}{n^2+n-1}$. Ora, como

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n-2}{n-3}\,\frac{n^2+n-1}{(n+1)^2+n} = \frac{1-2/n}{1-3/n}\,\frac{1+1/n-1/n^2}{(n+1)^2/n^2+1/n} \to 1\,,$$

vem $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$.

(6,0) **IV.** Considere a função $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -e^{\frac{1}{2x}}, & \text{se } x<0, \\ \log \dfrac{1}{1+x^2}, & \text{se } x>0. \end{cases}$$

a) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Resolução:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{2x}} = -e^0 = -1 \ \text{ e } \ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \log\frac{1}{1+x^2} = -\infty\ .$$

b) Justifique que f é contínua em todo o seu domínio e mostre que é prolongável por continuidade ao ponto 0.

Resolução: O domínio é a união de dois intervalos disjuntos, e em cada um deles f é a composta de funções contínuas, sendo portanto contínua. Além disso, tem-se

$$\lim_{x\to0-} f(x) = -\lim_{x\to0-} e^{\frac{1}{2x}} = 0 \ \text{ e } \ \lim_{x\to0+} f(x) = \lim_{x\to0+} \log\frac{1}{1+x^2} = 0\ ,$$

pelo que $\lim_{x\to0} f(x) = 0$, o que mostra que f é prolongável por continuidade ao ponto 0, prolongamento o qual assume neste ponto o valor zero.

c) Calcule a função derivada f' e determine os intervalos de monotonia da função f.

Resolução: Tem-se $f' : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2}\, e^{\frac{1}{2x}}, & \text{se } x<0, \\ -\dfrac{2x}{1+x^2}, & \text{se } x>0. \end{cases}$$

Ora $f'(x) > 0$ para $x<0$, e portanto f é estritamente crescente em $]-\infty,0[$. Por outro lado, $f'(x)<0$ para $x>0$, pelo que f é estritamente decrescente em $]0,+\infty[$.

d) Sendo $\tilde{f}$ o prolongamento contínuo de f ao ponto zero, justifique que $\tilde{f}$ tem máximo e mínimo em qualquer intervalo da forma $[-a, a]$ com $a > 0$. Indique, justificando, o valor de $\max\limits_{x\in[-a,a]} \tilde{f}(x)$.

Resolução:
Pelo Teorema de Weierstrass, como $\tilde{f}$ é contínua em $[-a, a]$, tem máximo e mínimo neste intervalo. A função é crescente em $[-a, 0]$ e decrescente em $[0, a]$, pelo que $\max\limits_{x\in[-a,a]} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(0) = 0$.

(2,5) **V.** Seja φ uma função real definida e contínua em $[1, +\infty[$, tal que

$$\varphi(1) = 2 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0.$$

Prove que existe máximo da função φ.

Resolução:
Uma vez que $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$, resulta da definição de limite que existe $a > 1$ tal que, para qualquer $x > a$, se tem $\varphi(x) \in V_2(0)$ e portanto $\varphi(x) < 2$ se $x > a$. No intervalo $[1, a]$ a função é contínua, pelo que tem máximo nesse intervalo (Teorema de Weierstrass). Como $\varphi(1) = 2$,

$$\max_{x\in[1,a]} \varphi(x) \geq 2.$$

Logo, tendo-se $\varphi(x) < 2$ para qualquer $x > a$,

$$\max \varphi = \max_{x\in[1,+\infty[} \varphi(x) = \max_{x\in[1,a]} \varphi(x).$$